

PROBLÈMES INVERSES

Identification de zones de fatigue par mesures
thermiques

Stéphane DENEROLLE
Vlad POPESCU

15 décembre 2008

Résumé

Nous nous intéressons au problème d'identification des sources thermiques à partir de mesures partielles de température. Ce besoin survient dans le cadre de méthodes non-destructives d'identification de régions soumises à la fatigue du métal, propices à l'amorçage de ruptures. Nous proposons un algorithme utilisant la décomposition SVD, partant de mesures discrètes en temps et espace du champ de température et construisant un champ de flux raccordé. La localisation des sources est alors implicite au champ obtenu. Nous proposons ensuite une méthode indicative de lissage du résultat engendré par des données bruitées, à l'aide de transformées de Fourier spatiales.

Table des matières

1	Présentation du problème direct	3
1.1	Modélisation	3
1.2	Exemples de problème direct	4
1.2.1	Exemple 1	4
1.2.2	Exemple 2	5
2	Problème inverse	7
2.1	Méthode d'inversion	7
2.2	Essais numériques	8
2.2.1	Reconstitution des sources à partir de données non bruitées	8
2.2.2	Reconstitution des sources à partir de données bruitées	9
2.3	Méthode de lissage	11
A	Éléments de notre code Cast3M	15
B	Éléments de notre code Scilab	16

Introduction

Sous l'action de contraintes ou de déformations variables dans le temps, un matériau est sujet au processus de fatigue, phénomène pouvant entraîner la formation de fissures et éventuellement la rupture de la structure. Les mécanismes entrant alors en jeu provoquent des dissipations mécaniques qui s'apparentent à des sources thermiques localisées. L'identification spatiale précise de ces sources permet de localiser les zones propices à l'amorçage de fissures. Cet enjeu est particulièrement intéressant pour le suivi des propriétés mécaniques d'une structure soumise à des charges cycliques.

Ce projet a pour objectif de construire une méthode permettant de retrouver la localisation de sources de chaleur à partir de données de températures. Il conviendra dans un premier temps de préciser le modèle considéré et le mode de résolution du problème direct. Ce calcul direct sera la source de mesures simulées de température que nous utiliserons ensuite dans le cadre de la résolution du problème inverse. Nous suivons le modèle proposé dans *An inverse problem in nondestructive evaluation of spot-welds* [1]. Nous testerons notre algorithme pour différents espacements d'échantillons de température et différentes configurations de sources, puis en introduisant un bruitage aléatoire des mesures de température. Pour ce dernier cas, nous exposons une méthode indicative originale d'élimination des perturbations et lissage du résultat.

1 Présentation du problème direct

1.1 Modélisation

Nous utilisons Cast3M pour la construction du maillage d'éléments finis et le calcul du problème direct.

Géométrie Nous considérons une plaque carrée de côté $c = 10$, de hauteur h et de conductivité thermique λ . Une condition de flux est imposée sur le dessus de la plaque, tandis que le dessous est isolé. La température est mesurée sur la face isolée. En faisant

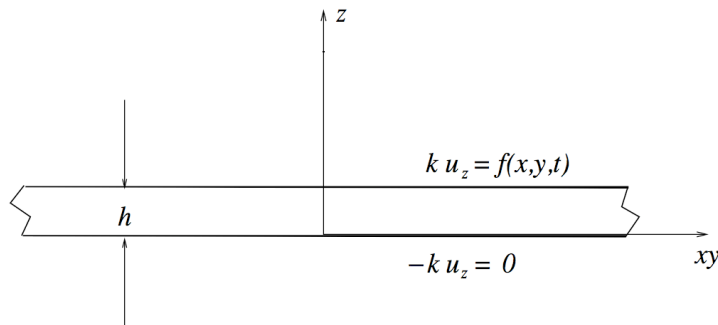


FIG. 1 – Modèle de plaque.

l'approximation d'une plaque fine ($h \ll c$), on peut simplifier ce problème tridimensionnel en un problème bidimensionnel grâce à la méthode présentée dans *An inverse problem in nondestructive evaluation of spot-welds* [1]. Le champ de température T satisfait alors l'équation :

$$T_t = \alpha \Delta_{xy} T + \frac{\alpha}{\lambda h} f(x, y, t),$$

où α est la diffusivité thermique. Ainsi, la plaque carré que nous considérons dans la suite de notre étude est bidimensionnelle

Condition aux limites La température aux bords de la plaque est imposée nulle :

$$T(x = 0, y) = T(x = c, y) = T(x, y = 0) = T(x, y = c) = 0.$$

Sources Les changements de température sont provoqués par l'activation de sources de chaleur au coeur de la plaque, suivant une évolution temporelle à préciser. Dans l'exemple de la FIG. 2, deux sources sont placées autour des points $P(4, 3)$ et $Q(6, 7)$.

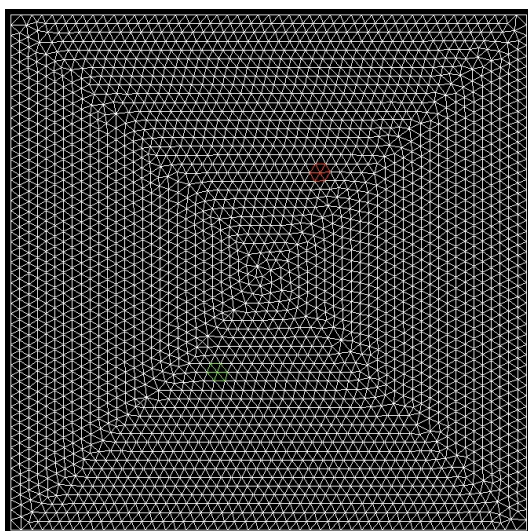


FIG. 2 – Maillage et sources.

1.2 Exemples de problème direct

Dans cet exemple, nous nous intéressons à l'évolution du champ de température sur $n_2 = 40$ itérations temporelles¹. Nous utilisons la procédure PASAPAS de Cast3M pour résoudre par un calcul incrémental notre problème thermique en tenant compte de la conduction, de la convection et du rayonnement.

1.2.1 Exemple 1

Dans cet exemple, les deux sources de la figure 1 ont même amplitude et sont activées en même temps après 10 itérations et éteintes à la 31^{ème} (voir FIG. 3).

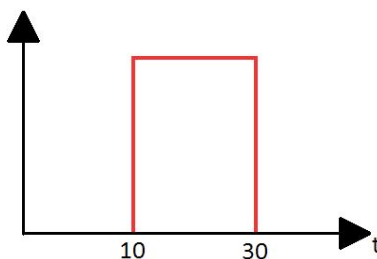


FIG. 3 – Évolution des termes de source.

L'évolution de la température est représentée sur la FIG. 4.

¹Les calculs sont en réalité opérés $n_1 = 80$ fois sur la durée totale de l'expérience, et le champ de température est sauvé toutes les 2 itérations de calcul.

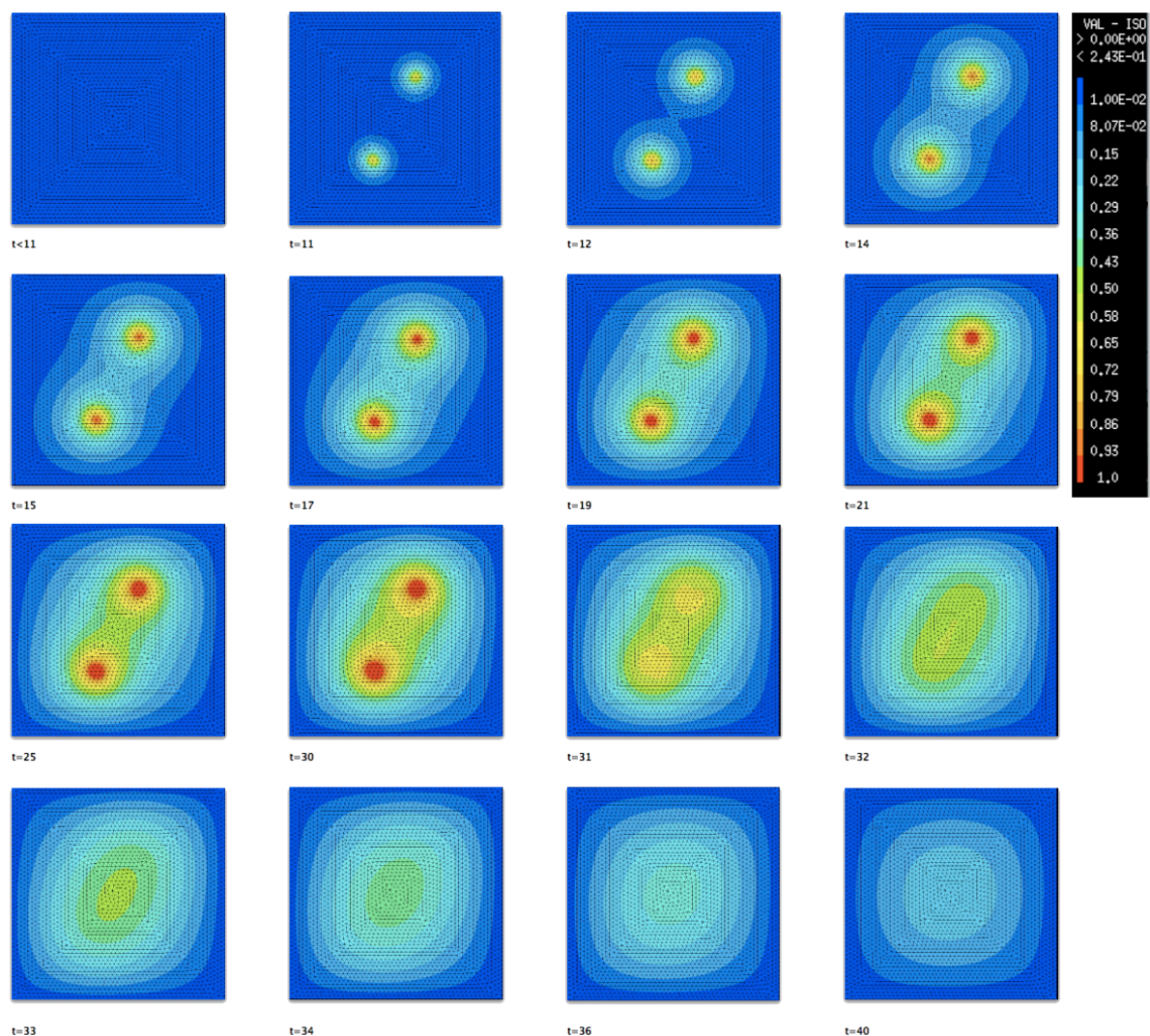


FIG. 4 – Évolution de la température en présence de 2 sources.

1.2.2 Exemple 2

Dans cet exemple, nous ajoutons aux deux sources de l'exemple 1 une source autour du point $R(5,5)$, d'amplitude deux fois plus importante, activée après 5 itérations et éteinte à la 21^{ème} (voir FIG. 5). Cet exemple permettra plus tard de tester notre méthode d'inversion quant à sa précision spatiale et temporelle.

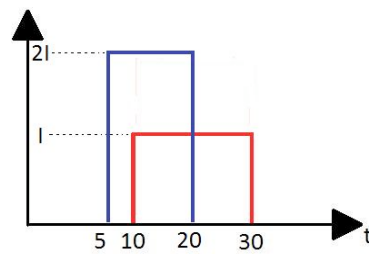


FIG. 5 – Évolution des termes de source.

L'évolution de la température est représentée sur la FIG. 6.

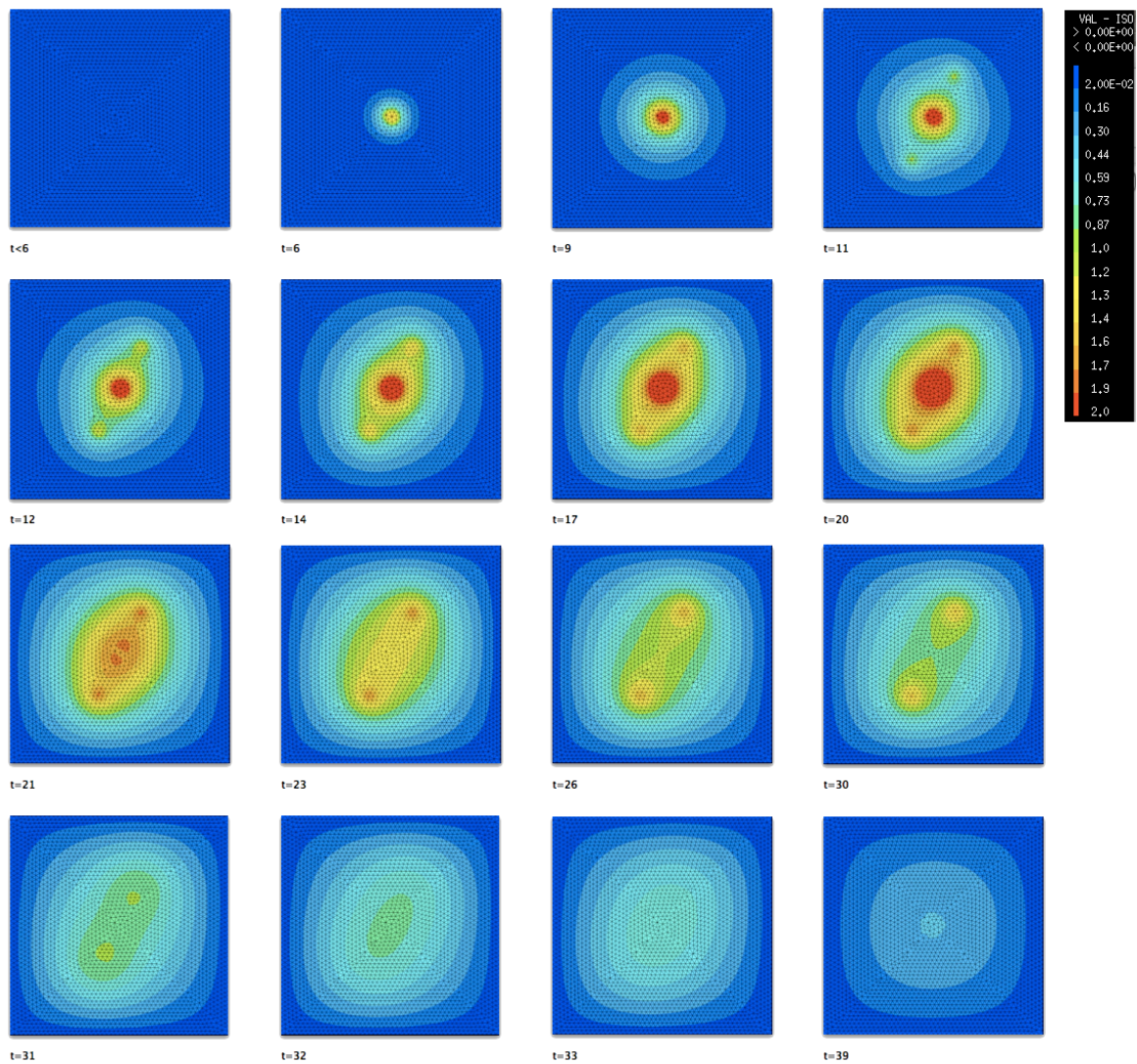


FIG. 6 – Évolution de la température en présence de 3 sources.

2 Problème inverse

2.1 Méthode d'inversion

Nous utilisons Scilab pour effectuer les calculs du problème inverse.

Nous partons de mesures de température à des intervalles de temps réguliers, aux points d'échantillonnage. Nous définissons l'ensemble \mathcal{S} de ces n^2 points de manière à bien quadriller le maillage :

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y) / x = \frac{ic}{n}, y = \frac{jc}{n}, (i, j) \in \{0, \dots, n-1\}^2 \right\}$$

Nous représentons ceci sous la forme d'une matrice T où $T(i, j)$ est la température au point i à l'instant j .

Nous rappelons que le problème direct (sous forme adimensionnée) s'écrit :

$$u_t = \Delta_{xy} u + f(x, y, t).$$

Soit k l'indice temporel. La solution discrétisée est donnée par l'expression récursive [1] :

$$u_{k+1} = K_0 u_k + K_1 f_k,$$

où les opérateurs linéaires K_0 et K_1 représentent respectivement les convolutions en espace avec les fonctions :

$$\begin{aligned} k_0(x, y) &= \frac{1}{4\pi\Delta t} \exp \frac{-(x^2 + y^2)}{4\Delta t}, \\ k_1(x, y) &= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{4\pi(\Delta t - \tau)} \exp \frac{-(x^2 + y^2)}{4(\Delta t - \tau)} d\tau. \end{aligned}$$

$k_0(x, y)$ est définie en tout point et sa discrétisation est simplement la valeur de la fonction.

$k_1(x, y)$ comporte une singularité logarithmique en $(0, 0)$. Nous utilisons en ce point l'approximation² proposée dans [1] :

$$k_1(0, 0) = \frac{1}{4\pi} \left(-\gamma - 2(\log \Delta x + c_1) + \log 4\Delta t \right),$$

et nous effectuons une approximation de l'intégrale par loi des trapèzes.

En pratique, nous construisons K_0 et K_1 en identifiant terme à terme leur action sur la base orthonormée usuelle des discrétisations par éléments finis (ie les fonctions affines de température, respectivement flux, définies par 1 en un point de \mathcal{S} et 0 en tous les autres). Nous calculons la valeur des convolutions avec les approximations discrètes

²Dans cette formule, γ est la constante d'Euler et $c_1 = -1.3105329259115095$.

des fonctions k_0 et k_1 définies ci-dessus. Bien évidemment, ces opérateurs sont invariants dans le temps.

En notant $u_k = T(\cdot, k)$, le problème revient à calculer le terme de source f_k en inversant K_1 :

$$f_k = K_1^{-1}(u_{k+1} - K_0 u_k).$$

Pour un nombre raisonnable de points d'échantillonnage, cette inversion peut s'effectuer facilement par la méthode SVD³. En écrivant K_1 sous la forme $K_1 = U\Sigma V^T$ (où les matrices U et V sont orthogonales et Σ est diagonale), l'inverse de Moore Penrose est donnée par $K_1^{-1} = V\Sigma^{-1}V^T$. Le conditionnement de la matrice K_1 est relativement élevé :

$$\text{cond}(K_1) = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = 24400.$$

Par conséquent, nous choisissons une régularisation par troncature des faibles valeurs propres de K_1 .

2.2 Essais numériques

2.2.1 Reconstitution des sources à partir de données non bruitées

Nous choisissons $\Delta t = \frac{T_1 - T_0}{n_1} = \frac{20 - 0}{40} = 1/2$ et $\Delta x = \frac{c}{n_{el}} = \frac{10}{50} = 1/5$.

Cette méthode permet d'aboutir à un résultat satisfaisant. La résolution de détection des sources est intimement liée au nombre d'échantillons. Les simulations de la FIG. 7, s'appuient sur l'évolution de température obtenue par le problème direct dans l'exemple 1 (voir FIG. 4). Le flux est tracé grâce à 25, puis 400 points d'échantillonnage.

L'estimation est très grossière pour la résolution faible, mais pour des mesures de température exactes (sans bruit) le flux construit permet d'identifier les sources.

³Singular Value Decomposition.

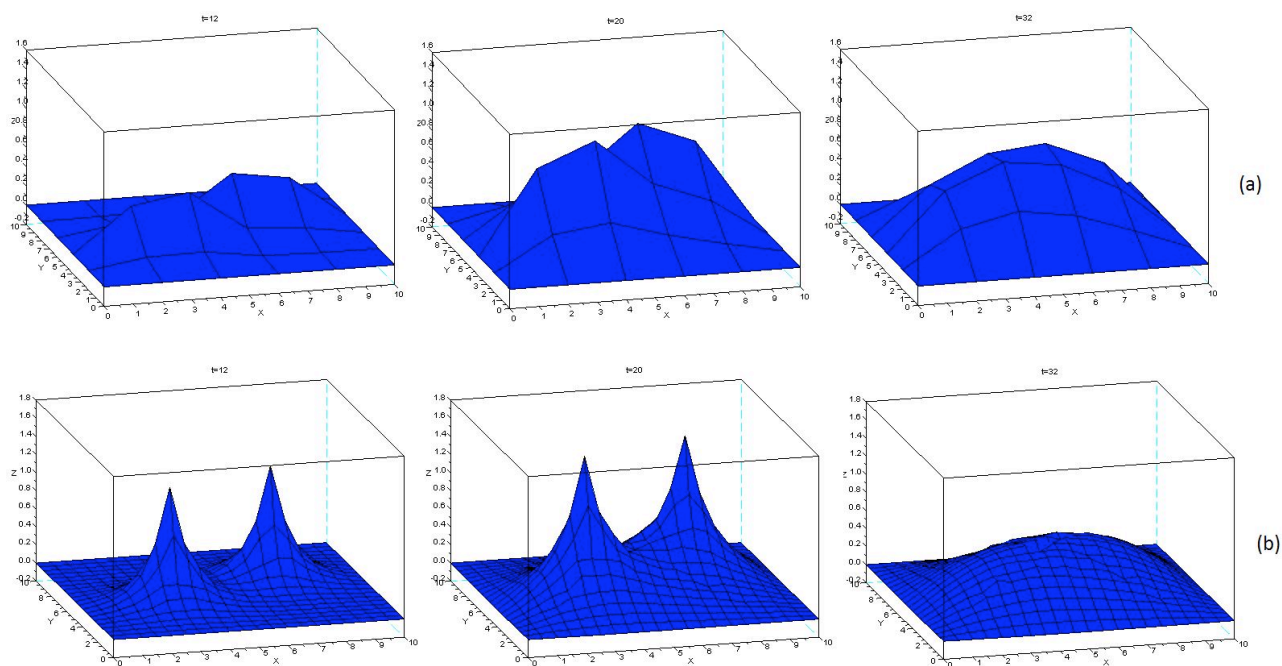


FIG. 7 – Représentation du flux raccordé aux temps $t = 12, 20$ & 32 pour : (a) 25 points ; (b) 400 points.

2.2.2 Reconstitution des sources à partir de données bruitées

Nous nous intéressons ensuite au cas de perturbation des mesures. Pour simuler les défauts d'enregistrement, nous ajoutons un bruit blanc (ie des variables aléatoires normales indépendantes en chaque point d'échantillonnage). L'écart type des distributions gaussiennes sera fixé à 10%. La FIG. 8 représente les champs de température bruités dans nos deux exemples.

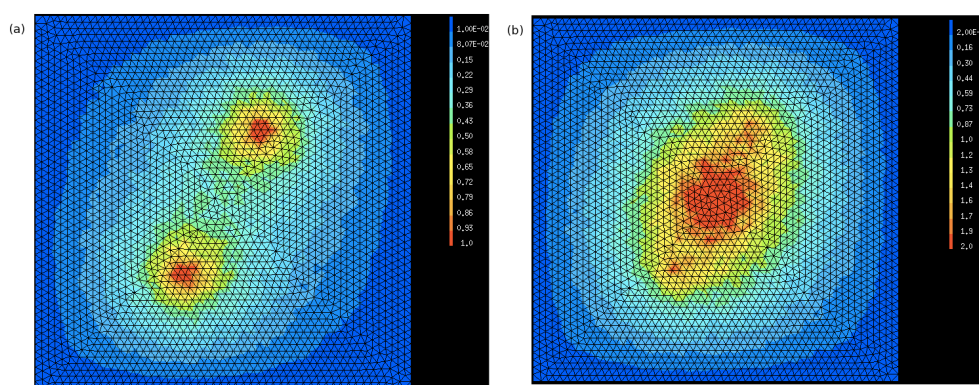


FIG. 8 – Influence du « bruit blanc » sur le champ de température à la date $t = 20$ pour : (a) l'exemple 1 ; (b) l'exemple 2.

Le résultat obtenu (voir FIG. 9 & 10) n'est plus aussi parlant, surtout pour un comportement asymétrique des sources

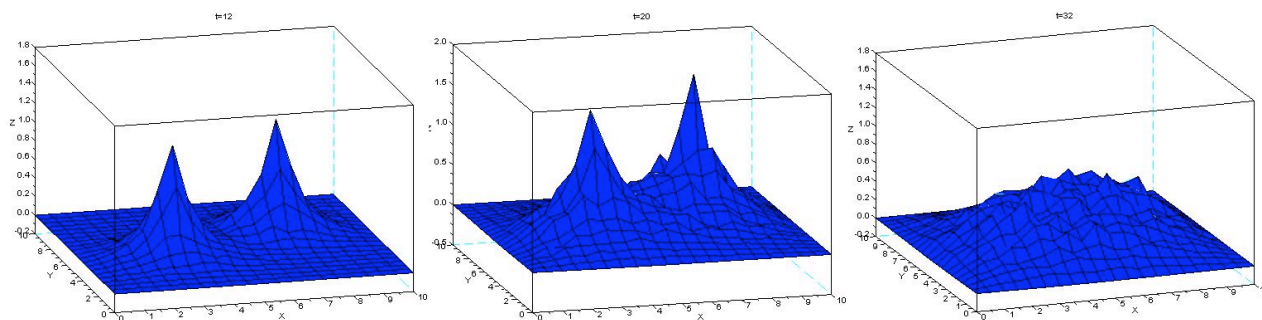


FIG. 9 – Représentation du flux raccordé pour 400 points avec perturbation dans le cas de l'exemple 1.

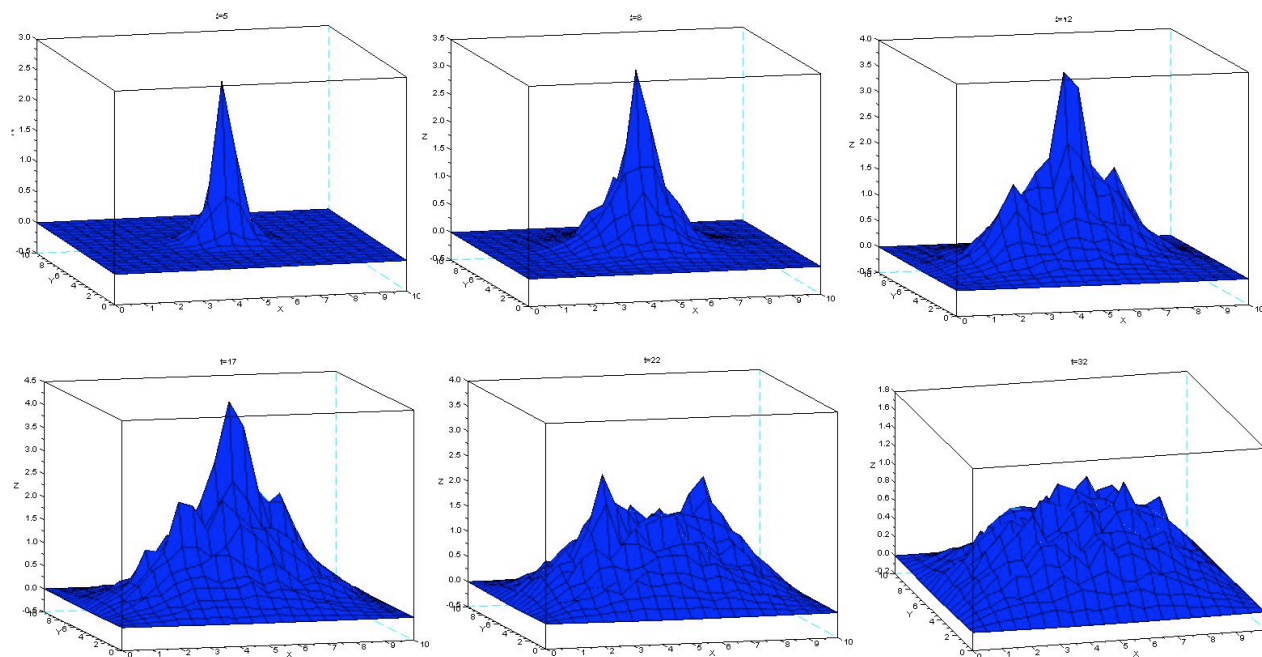


FIG. 10 – Représentation du flux raccordé pour 400 points avec perturbation dans le cas de l'exemple 2.

2.3 Méthode de lissage

Nous schématisons une méthode permettant d'améliorer le résultat précédent. Nous proposons d'effectuer la transformée de Fourier spatiale du flux obtenu, et de ne conserver que les plus hautes fréquences. Une transformée de Fourier inverse permet alors de retrouver un flux bien plus régulier, où la localisation des sources ne pose plus aucun problème. En pratique, l'utilisation des transformées de Fourier rapides réduit le temps de calcul.

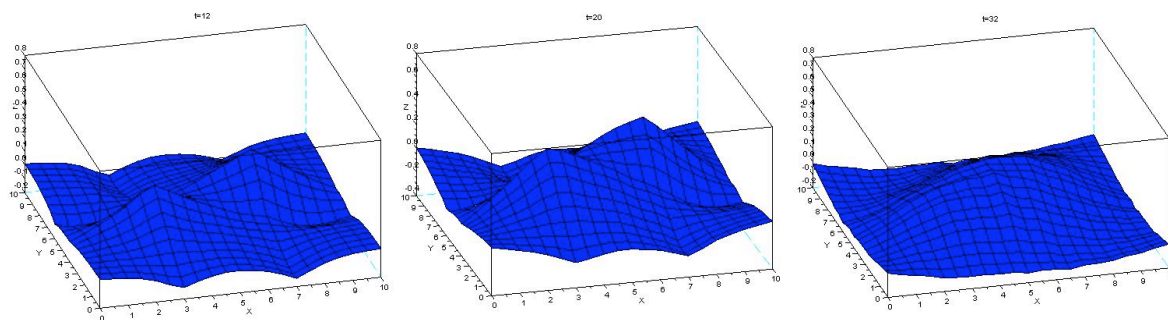


FIG. 11 – Représentation du flux raccordé pour 400 points avec perturbation dans le cas de l'exemple 1, après lissage.

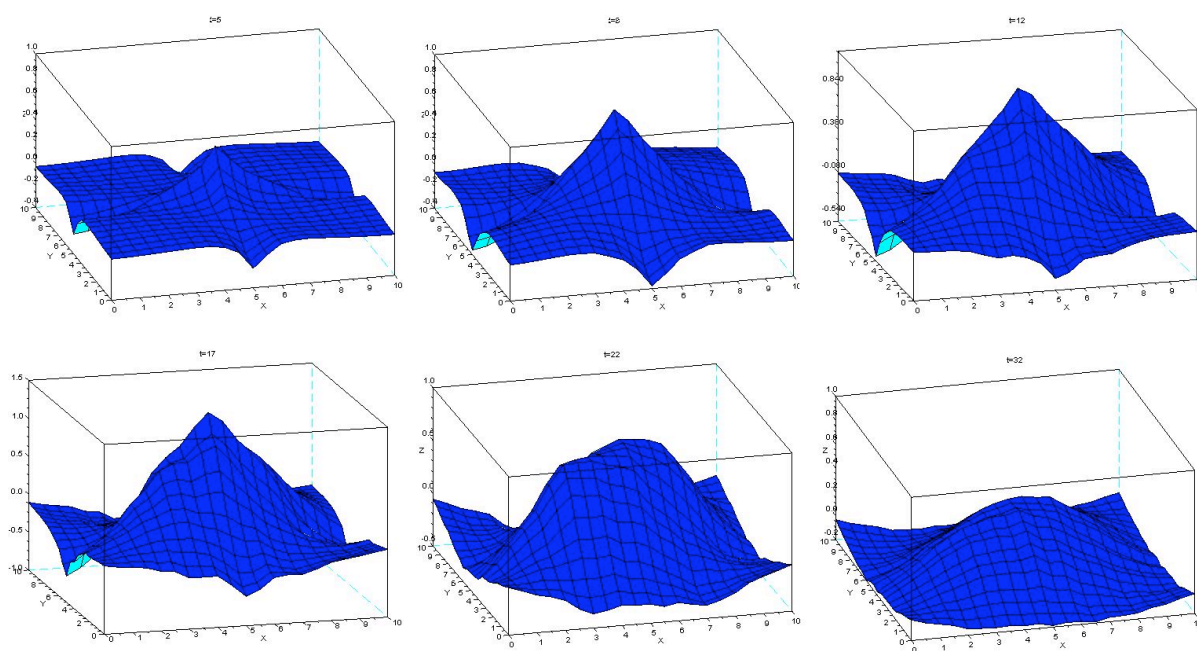


FIG. 12 – Représentation du flux raccordé pour 400 points avec perturbation dans le cas de l'exemple 2, après lissage.

Le résultat est grossier, et nous perdons une partie significative des informations sur l'intensité des sources (voir FIG. 11 & 12). Dans le cas du déclenchement asymétrique des sources, cette méthode de calcul brutale provoque l'atténuation des sources secondaires. Les informations sur celles-ci sont « noyées » par le poids de la source centrale. Toutefois, une étude détaillée sur ce sujet est hors du cadre de ce projet. Nous pensons qu'il serait possible d'améliorer sensiblement le résultat du filtrage en effectuant une troncature différenciée des amplitudes de chaque harmonique spatiale, correspondant à la décroissance attendue du flux autour d'une source, plutôt qu'une coupure brusque telle que nous l'avons imposée.

Voici une idée des axes de démonstration de la validité de cette méthode. Considérons le flux calculé à partir de données exactes. En-dehors de la source, la conservation de la divergence implique une décroissance en $1/r$. La pente de ce flux (ie la norme du gradient) décroît donc en $1/r^2$. Or cette pente correspond à une fréquence spatiale que l'on peut identifier par une analyse en effectuant la transformée de Fourier discrète bivariable (spatiale dans le plan). Dans ce domaine, les sources correspondent donc grossièrement aux plus hautes fréquences (spatiales), le reste du champ correspond aux fréquences inférieures, qui de plus décroissent rapidement. L'information essentielle comprise dans le champ de flux est ainsi donnée par les plus grandes fréquences. Cette information n'est rien d'autre que la présence de la source elle-même.

Pourquoi ce raisonnement reste-t-il valable dans le cas de température bruitée? En réalité, ceci n'est correct que si la fréquence maximale atteinte en un point quelconque, affectée par la perturbation, demeure inférieure à la fréquence de la source. Or nous avons simulé un bruit blanc d'écart type de 10%. Ainsi, la pente entre deux points d'échantillonnage voisins pourra varier pour la plupart des positions de moins de 20% par rapport à ce qu'elle était pour les mesures pures. Ceci ne posera problème qu'à proximité de la source, dès que l'on s'en éloigne un peu du fait de la décroissance en $1/r^2$ le bruit sera supprimé par le filtrage. L'erreur au voisinage de la source ne peut être réduite que par une amélioration de la résolution spatiale des mesures de températures en ce voisinage.

Conclusion

Nous avons présenté une méthode de reconstitution du flux thermique à partir de mesures partielles de température. Cela permet d'identifier aisément les sources thermiques, et constitue donc une méthode non-destructive de détection des régions soumises à des sollicitations répétées dans un matériau sous contrainte. Comme attendu, la résolution spatiale des mesures impacte directement la précision du flux reconstitué. Pour des mesures imprécises (présence de bruit), la localisation des sources s'avère délicate pour une faible résolution, notamment dans le cas de sources multiples et à comportements différenciés (en ce qui concerne les amplitudes atteintes et la plage temporelle d'allumage). Pour améliorer le processus de détection, nous proposons d'explorer le filtrage par transformée de Fourier spatiale. Nous avons ici illustré l'effet d'une telle manipulation qui sous forme générale, bien qu'insuffisamment adaptée au problème pour obtenir un résultat précis en toute circonstance, laisse transparaître un potentiel important.

Références

- [1] FRANCINI Elsa, HOFT Thomas, SANTOSA Fadil . *An inverse problem in nondestructive evaluation of spot-welds*. Institute of Physics Publishing : Inverse Problems 22, 2006, 17 p.
- [2] MALLAT Stéphane. *Traitement du signal*. École Polytechnique, Département de Mathématiques Appliquées, édition 2000, réimpression 2008

Appendices

A Éléments de notre code Cast3M

```

*----- Construction d'un tableau de points particuliers-----
PTS = TABLE ;
i=1;

repete bou1 nb;
repete bou2 nb;

PTS.i = QTOTS POIN PROC (( (Long/ nb) * (&bou1 - 1)) ( (Long/ nb) * (&bou2 - 1))) ;

i=i+1;
fin bou2;
fin bou1;

*----- Mesure de la température en ces points -----

mespoi = collage PTS;
repete bouT (n1_pas);
tt = redu mespoi (TAB2.(&bouT));
k=1;
repete bou (nb*nb);
message (extr tt T (mespoi poin k));
k=k+1;
fin bou;
fin bouT;

*----- Construction des matrices K0 et K1 -----

repete qbou (nb*nb);
qq = PTS . (&qbou);
xqq yqq = coor qq;

repete pbou (nb*nb) ;

pp = PTS . (&pbou);
xpp ypp = coor pp;

fctk = (1/(4 * 3.14157 * deltat)) * (exp ((( (xx - xpp)*(xx - xpp) ) + ((yy-ypp)*(yy-ypp))))/(-4. * deltat));

k0pq = intg mod1 (changer cham mod1 (ooqq * fctk));

si (&qbou ega &pbou);
k1pq= 1/(4*3.14157) * (-0.5772 - 2. * (log((10./nel))- 1.318533) + (log(( 4. * deltat )))) ;
sinon ;
k1pq = deltat * k0pq;
finsi;

message xqq yqq xpp ypp k0pq k1pq ;

fin pbou ;
fin qbou ;
    
```

FIG. 13 – Construction de \mathcal{S} , du tableau de mesures T et des matrices K_0 et K_1 .

B Éléments de notre code Scilab

```
//calcul de la matrice de flux par inversion SVD

function[source]=solution(K0,K1,T);
source=zeros(400,39);
[U,S,V]=svd(K1);
Kinv=V*S^(-1)*(U');

for i=1:39

Tk=zeros(400,1);
Tk1=zeros(400,1);
for j=1:400
Tk(j,1)=T(j,i);
Tk1(j,1)=T(j,i+1);
end;

f=Kinv*(-K0*Tk+Tk1);
for j=1:400
source(j,i)=f(j,1);
end;
end;
endfunction;

//lissage du flux bruité par transformée de Fourier

function[propre]=nettoyage(bruit);

fbr=fft(bruit);

for i=1:20
for j=1:20

if ((i>2)|(i<18)|(j>2)|(j<18))

fbr(i,j)=0

end

end;
end;

propre=real(ifft(fbr));

endfunction;
```

FIG. 14 – Calcul du flux & lissage.