

Vârtejuri în fluide și superfluide
Tourbillons en fluides et superfluides
Vortex flows in fluids and superfluids

Ionut Danaila

Laboratoire Jacques Louis Lions
Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)
<http://www.ann.jussieu.fr/~danaila>

Plan de l'exposé

- 1 Introduction**
 - Notion de tourbillon / intuition physique
- 2 Fluides classiques : simulations Navier-Stokes**
 - Études d'écoulements moteur : domaines fictifs
 - Vortex ring : simulations Navier-Stokes
 - Le jet turbulent
- 3 Superfluides : tourbillons dans les condensats de Bose-Einstein**
 - Condensat de Bose-Einstein et tourbillons
 - Condensat sans rotation
 - Condensat en rotation : description mathématique
 - Condensat en rotation : résultats numériques

Plan de l'exposé

1

Introduction

- Notion de tourbillon / intuition physique

2

Fluides classiques : simulations Navier-Stokes

- Études d'écoulements moteur : domaines fictifs
- Vortex ring : simulations Navier-Stokes
- Le jet turbulent

3

Superfluides : tourbillons dans les condensats de Bose-Einstein

- Condensat de Bose-Einstein et tourbillons
- Condensat sans rotation
- Condensat en rotation : description mathématique
- Condensat en rotation : résultats numériques

Tourbillons dans les fluides *classiques* (2)

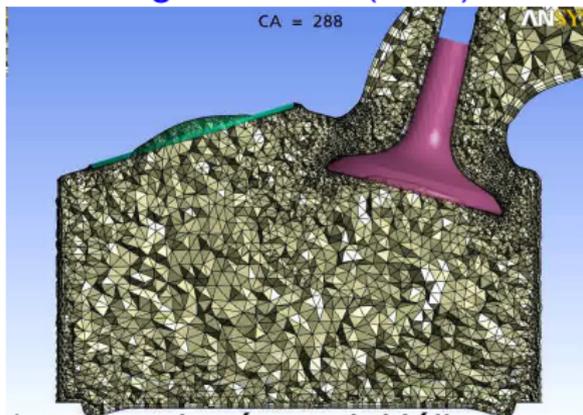


Plan de l'exposé

- 1 **Introduction**
 - Notion de tourbillon / intuition physique
- 2 **Fluides classiques : simulations Navier-Stokes**
 - Études d'écoulements moteur : domaines fictifs
 - Vortex ring : simulations Navier-Stokes
 - Le jet turbulent
- 3 **Superfluides : tourbillons dans les condensats de Bose-Einstein**
 - Condensat de Bose-Einstein et tourbillons
 - Condensat sans rotation
 - Condensat en rotation : description mathématique
 - Condensat en rotation : résultats numériques

Études d'écoulements moteur : domaines fictifs

- modélisation
- maillages non-structures : remaillage coûteux (80%)

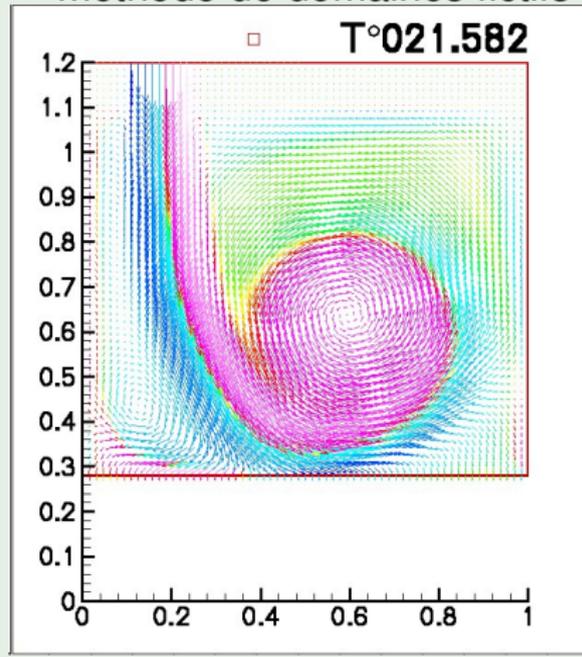


(communiqué par J. Hélie,
Continental Automotive France)

contrats de recherche : Institut
Français du Pétrole

Recherche fondamentale

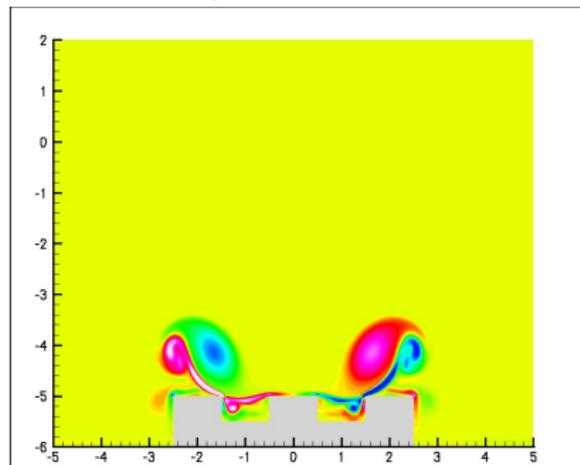
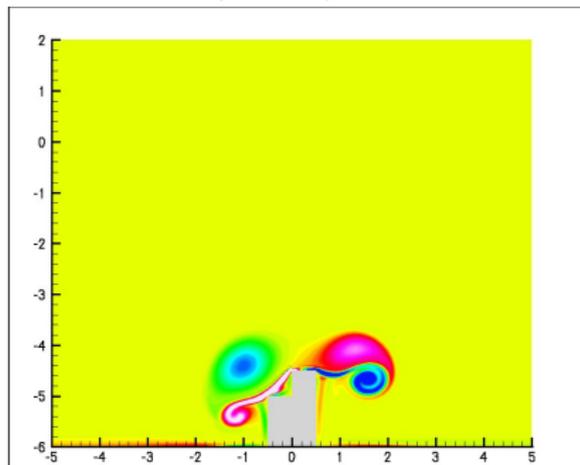
- méthode de domaines fictifs



Écoulements moteur : domaines fictifs

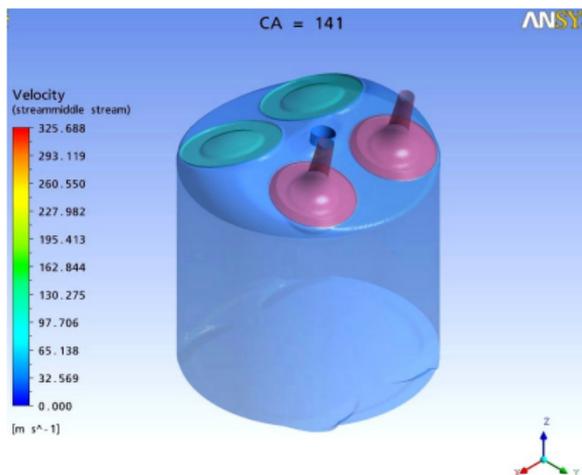
Domaines fictifs : interaction d'un couple de tourbillons avec des obstacles

I. Danaila, *Flow, Turbulence and Combustion*, 2004.



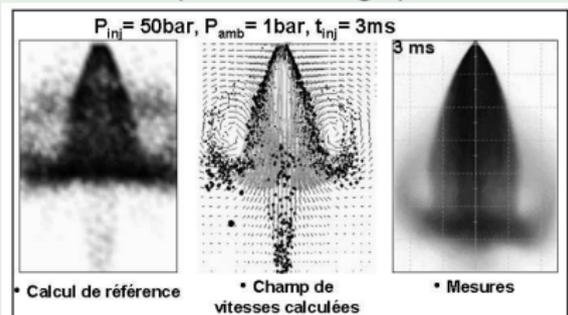
Injection dans un moteur d'automobile

Simulation industrielle
(communiqué par J. Hélie,
Continental Automotive France)



Recherche fondamentale

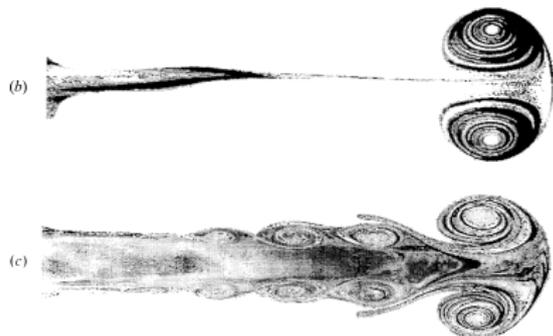
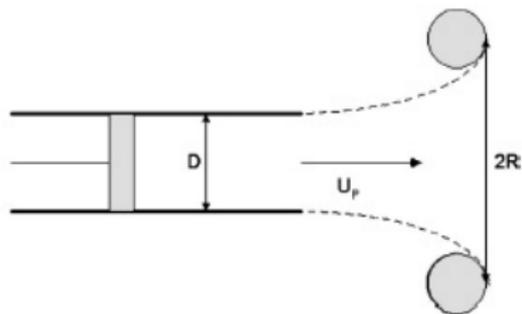
- étude de tourbillons
(vortex rings)



(communiqué par C. Habchi,
Institut Français du Pétrole)
contrats de recherche : IFP,
Continental Automotive

Tourbillon toroïdal (vortex ring)

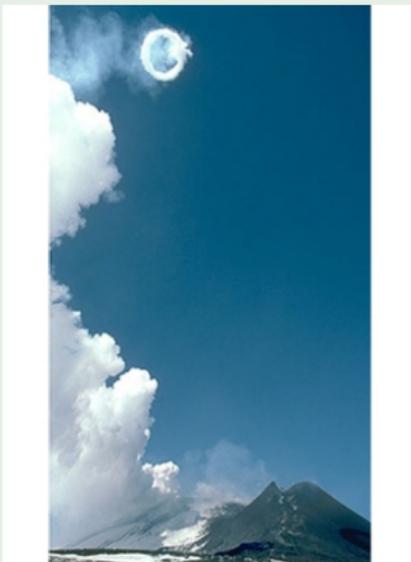
- décharge d'un jet fluide à travers une ouverture circulaire dans un milieu au repos



(d'après Gharib et al., 1998)

Écoulement fondamental

animaux marins



(<http://www.stromboli.net>)

animaux marins



K. Martin et al., Scientific American, 1996.

Simulations Navier-Stokes

Code 3D développé : JETLES

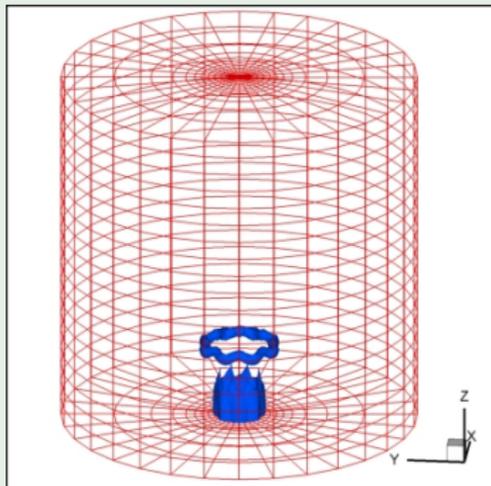
solveur 3D en coordonnées cylindriques des

- équations N-S incompressibles
- équations N-S à faible nombre de Mach

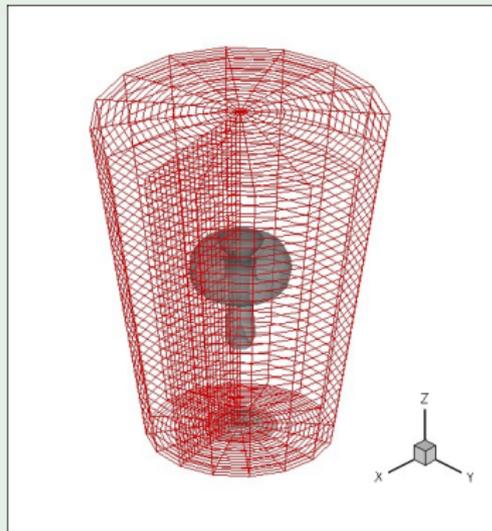
(thèse de S. Benteboula)

Système de coordonnées

code de I. Danaila
(LJLL, UPMC)

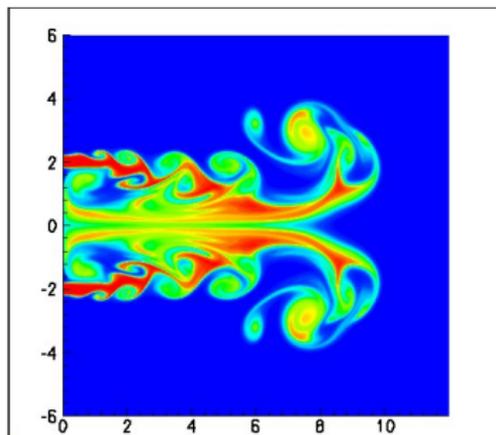


code de B. J. Boersma
(TU Delft, Pays Bas)

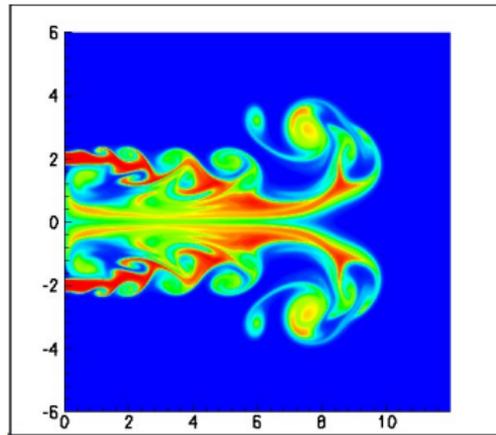


Le jet annulaire ($\rho = \text{const.}$)

scalaire passif

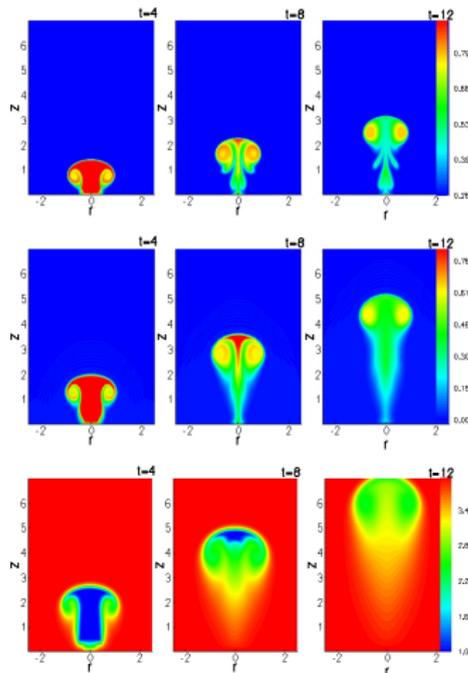


vorticité



L'anneau de tourbillon à masse volumique variable

Température

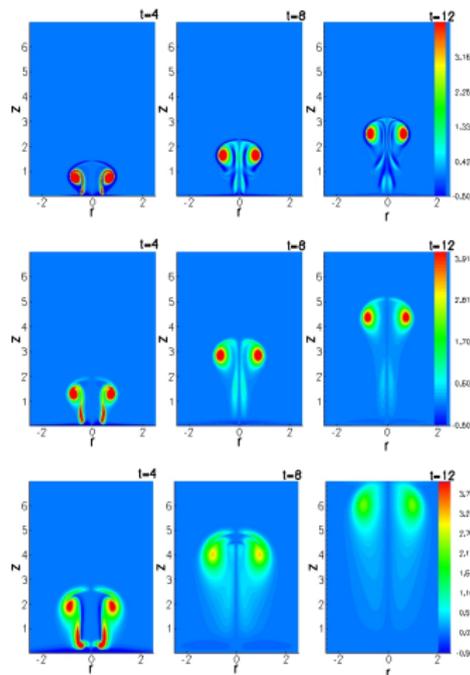


Jet chaud $\alpha = 4$

$\alpha = 1$

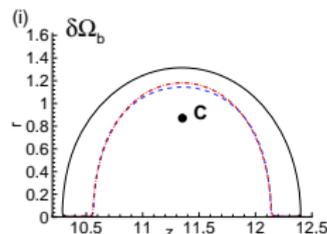
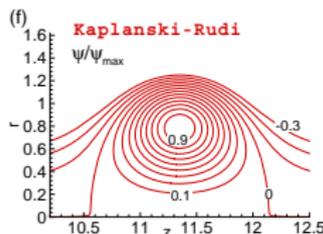
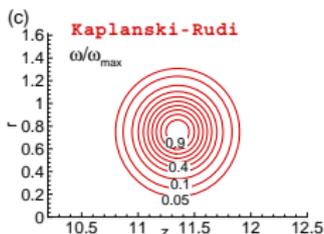
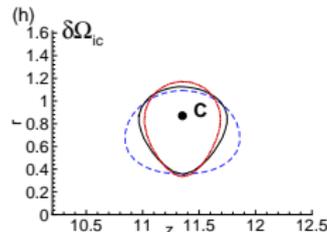
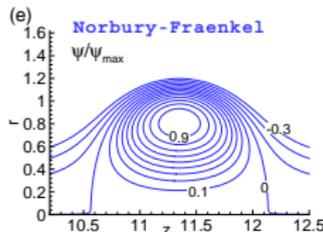
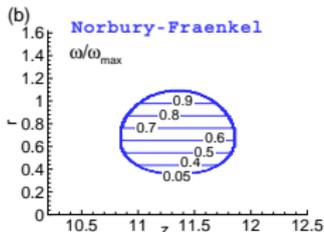
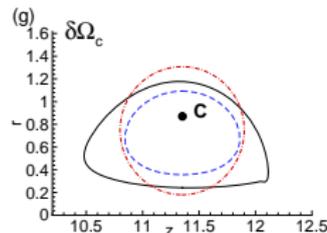
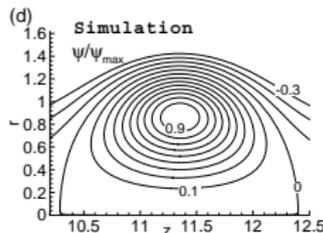
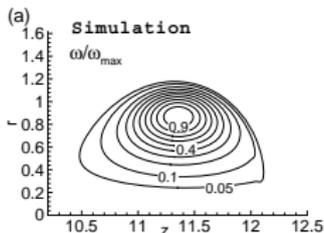
Jet froid $\alpha = 1/4$

Vorticité



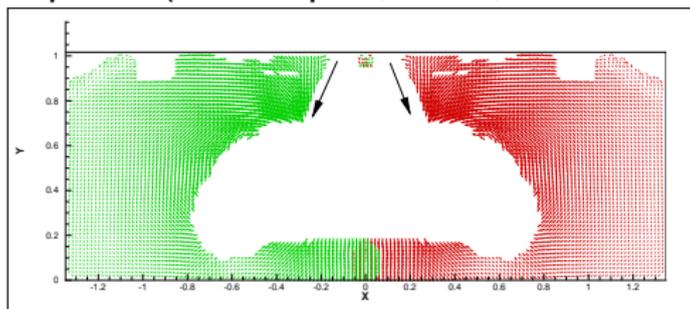
Modèles théoriques

I. Danaila and J. H elie, *Physics of Fluids*, 2008.

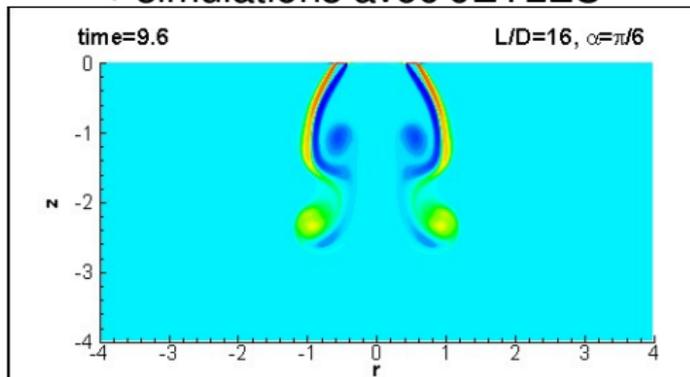


Reconstruction du champ de vitesse

- champ PIV (B. Prospero, IMFT, Siemens VDO)

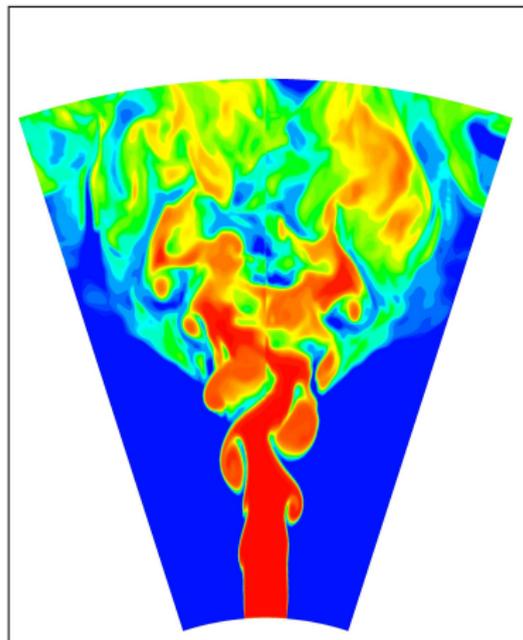
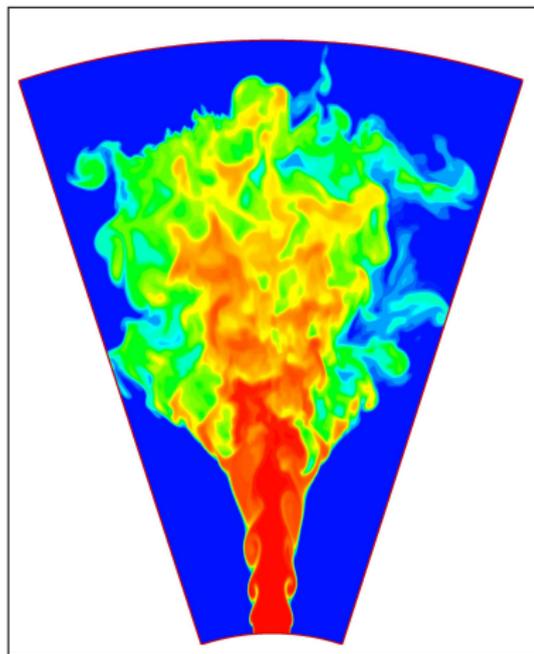
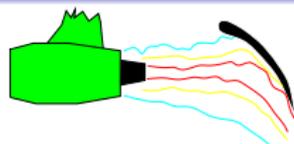


- simulations avec JETLES



Le jet turbulent

I. Danaïla and B. J. Boersma,
Physics of Fluids, 2000.



Plan de l'exposé

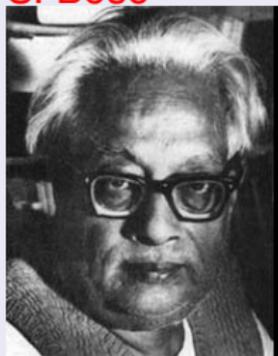
- 1 **Introduction**
 - Notion de tourbillon / intuition physique
- 2 **Fluides classiques : simulations Navier-Stokes**
 - Études d'écoulements moteur : domaines fictifs
 - Vortex ring : simulations Navier-Stokes
 - Le jet turbulent
- 3 **Superfluides : tourbillons dans les condensats de Bose-Einstein**
 - Condensat de Bose-Einstein et tourbillons
 - Condensat sans rotation
 - Condensat en rotation : description mathématique
 - Condensat en rotation : résultats numériques

Condensat de Bose-Einstein (1)

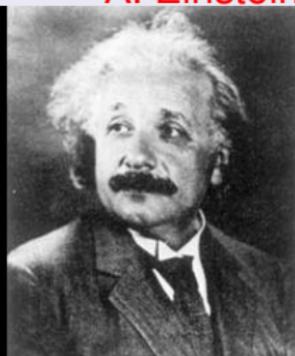
Nouvel état de la matière : **super-atome**
Propriétés : **super-fluidité, supra-conductivité.**

Prédit en 1924

S. Bose



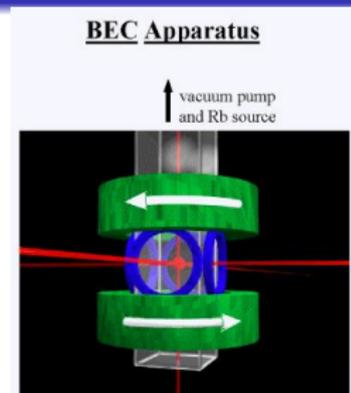
A. Einstein



Condensat de Bose-Einstein (2)

Expérience de Wieman et Cornell (1995)

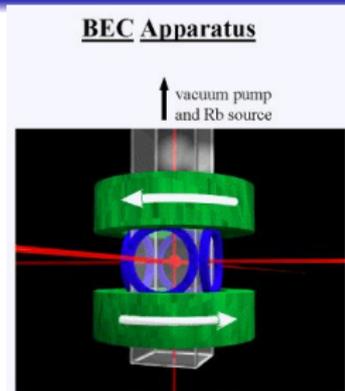
- 1000 atomes de Rubidium (Rb)
- piège magnétique
- refroidissement par lasers + radio-fréquence $T \sim 20\text{nK}$
- dimension $\sim 100\mu\text{m}$, $t \sim 1\text{s}$



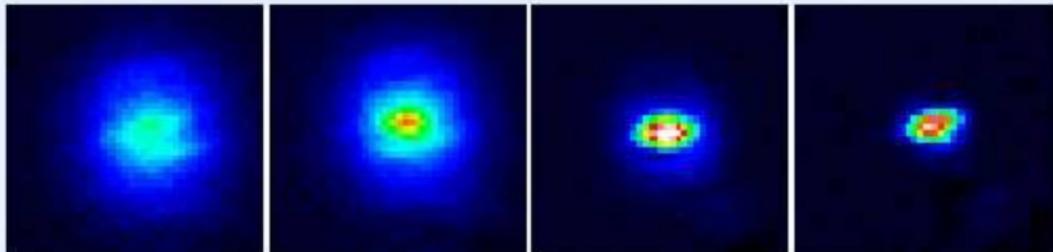
Condensat de Bose-Einstein (2)

Expérience de Wieman et Cornell (1995)

- 1000 atomes de Rubidium (Rb)
- piège magnétique
- refroidissement par lasers + radio-fréquence $T \sim 20\text{nK}$
- dimension $\sim 100\mu\text{m}$, $t \sim 1\text{s}$

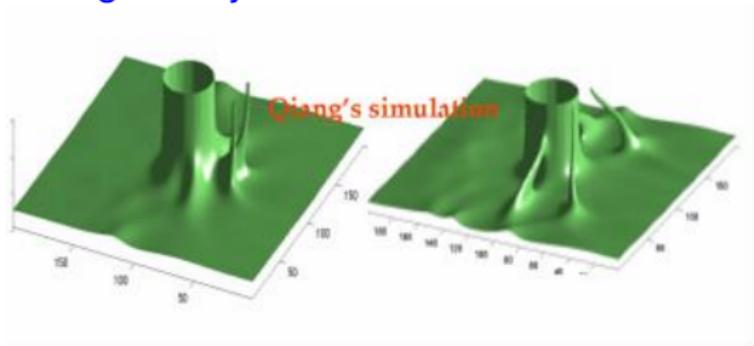


Expériences au Lab Kastler Brossel, ENS Paris



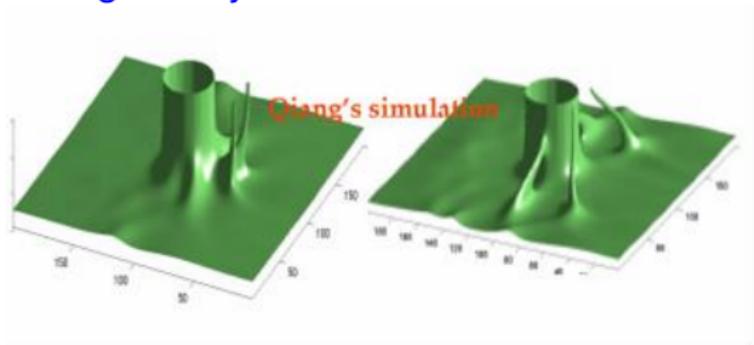
Vortex dans un condensat de Bose-Einstein

Sillage d'objets

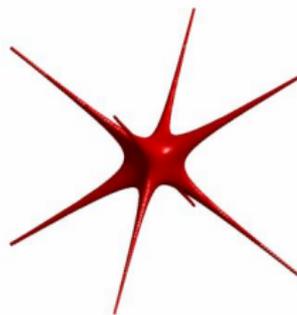


Vortex dans un condensat de Bose-Einstein

Sillage d'objets



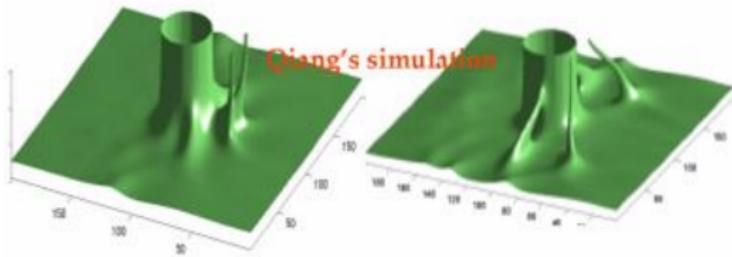
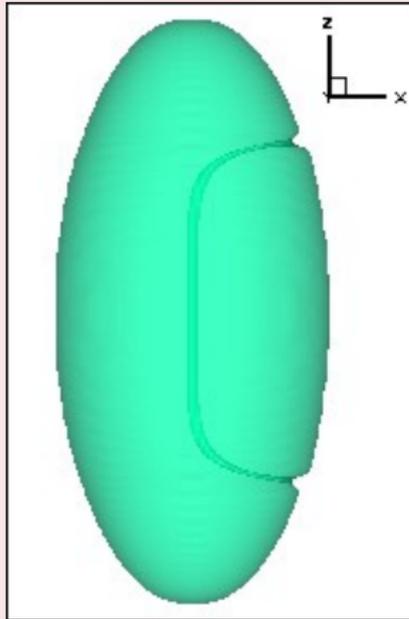
Impression de la phase



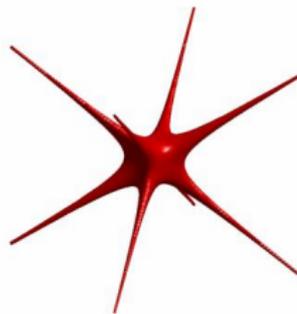
Vortex dans un condensat de Bose-Einstein

Sillage d'objets

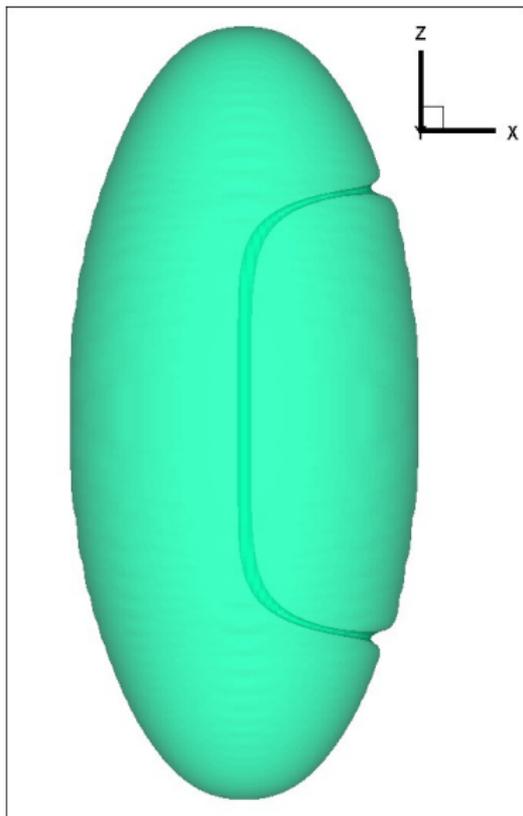
Rotation



Impression de la phase



Identification du vortex (1)



Description macroscopique

- ψ fonction d'onde

$$\psi = \sqrt{\rho(r)} e^{i\theta(r)}$$

- **vortex** :: $\rho = 0$ + rotation
- champ de vitesses

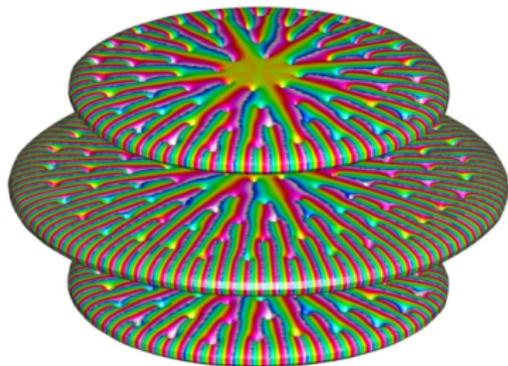
$$v(r) = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta$$

- circulation **quantifiée**

$$\Gamma = \int v(s) ds = n \frac{\hbar}{m}$$

Identification du vortex (2)

piège optique



vortex géant



Modèle de Gross-Pitaevskii (1)

Energie 3D de Gross-Pitaevskii

$$\mathcal{E}(\psi) = \int_{\mathcal{D}} \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi|^2}_{\text{én. cinétique}} + \underbrace{\hbar\Omega \cdot (i\psi, \nabla\psi \times \mathbf{x})}_{\text{rotation}} + \underbrace{V_{\text{trap}} |\psi|^2}_{\text{piège}} + \underbrace{Ng_{3D} |\psi|^4}_{\text{interactions}}$$

scaling : [A. Aftalion, T. Rivière, Phys. Rev. A, 2001.]

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}/R, \quad u(\mathbf{r}) = R^{3/2}\psi(\mathbf{x}), \quad R = d/\sqrt{\varepsilon}$$

$$d = (\hbar/m\omega_{\perp})^{1/2}, \quad \varepsilon = (d/8\pi Na_s)^{2/5}, \quad \tilde{\Omega} = \Omega/(\varepsilon\omega_{\perp}).$$

énergie sans dimension

$$E(u) = H(u) - \tilde{\Omega}L_z(u), \quad L_z(u) = i \int \bar{u} (y\partial_x u - x\partial_y u)$$

$$H(u) = \int \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) |u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} |u|^4$$

Modèle de Gross-Pitaevskii (1)

Energie 3D de Gross-Pitaevskii

$$\mathcal{E}(\psi) = \int_{\mathcal{D}} \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi|^2}_{\text{én. cinétique}} + \underbrace{\hbar\Omega \cdot (i\psi, \nabla\psi \times \mathbf{x})}_{\text{rotation}} + \underbrace{V_{\text{trap}}|\psi|^2}_{\text{piège}} + \underbrace{Ng_{3D}|\psi|^4}_{\text{interactions}}$$

scaling : [A. Aftalion, T. Rivière, Phys. Rev. A, 2001.]

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}/R, \quad u(\mathbf{r}) = R^{3/2}\psi(\mathbf{x}), \quad R = d/\sqrt{\varepsilon}$$

$$d = (\hbar/m\omega_{\perp})^{1/2}, \quad \varepsilon = (d/8\pi Na_s)^{2/5}, \quad \tilde{\Omega} = \Omega/(\varepsilon\omega_{\perp}).$$

énergie sans dimension

$$E(u) = H(u) - \tilde{\Omega}L_z(u), \quad L_z(u) = i \int \bar{u} (y\partial_x u - x\partial_y u)$$

$$H(u) = \int \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} V_{\text{trap}}(\mathbf{r})|u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} |u|^4$$

Modèle de Gross-Pitaevskii (2)



états stables :: points critiques $\min E(u)$



équation de Lagrange

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \nabla^2 u + i(\Omega \times r) \cdot \nabla u = -\frac{u}{2\varepsilon^2} (V_{trap} - |u|^2) + \mu_\varepsilon u$$

contrainte : $\int_D u^2 = 1$

Modèle de Gross-Pitaevskii (2)



états stables :: points critiques $\min E(u)$



équation de Lagrange

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \nabla^2 u + i(\Omega \times r) \cdot \nabla u = -\frac{u}{2\varepsilon^2} (V_{trap} - |u|^2) + \mu_\varepsilon u$$

contrainte : $\int_{\mathcal{D}} u^2 = 1$

Modèle de Gross-Pitaevskii (2)



états stables :: points critiques $\min E(u)$



équation de Lagrange

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \nabla^2 u + i(\Omega \times r) \cdot \nabla u = -\frac{u}{2\varepsilon^2} (V_{trap} - |u|^2) + \mu_\varepsilon u$$

contrainte : $\int_{\mathcal{D}} u^2 = 1$

Intégration en temps imaginaire

Code 3D développé : Bose

résolution de $:: \frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{H}(u) + \nabla^2 u, u \in \mathbb{C}$

- schéma de **Runge Kutta + Crank-Nicolson**

$$\frac{u_{l+1} - u_l}{\delta t} = a_l \mathcal{H}_l + b_l \mathcal{H}_{l-1} + c_l \nabla^2 \left(\frac{u_{l+1} + u_l}{2} \right)$$

- résolution par factorisation **ADI**

$$(I - c_l \delta t \nabla^2) = (I - c_l \delta t \partial_x^2)(I - c_l \delta t \partial_y^2)(I - c_l \delta t \partial_z^2)$$

- projection** à la fin de 3 pas de R-K

$$u = \frac{u}{\int_{\mathcal{D}} |u|^2}$$

Discrétisation spatiale

- schémas compacts (ou **Padé**) à l'**ordre 6**

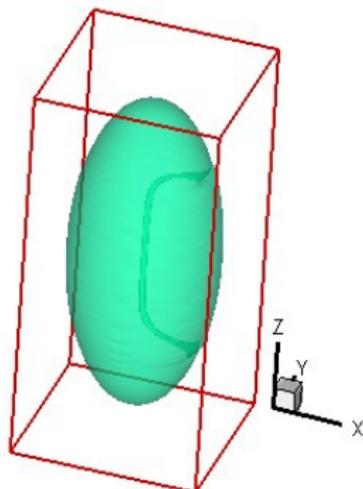
$$\frac{1}{3}u'_{i-1} + u'_i + \frac{1}{3}u'_{i+1} = \frac{14}{9} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + \frac{1}{9} \frac{u_{i+2} - u_{i-2}}{4h},$$

$$\frac{2}{11}u''_{i-1} + u''_i + \frac{2}{11}u''_{i+1} = \frac{12}{11} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{3}{11} \frac{u_{i+2} - 2u_i + u_{i-2}}{4h^2}$$

- conditions aux limites : $u = 0$
- domaine de calcul

$$\mathcal{D} \supset \{\rho_{TF} = \rho_0 - V_{trap} = 0\}, \quad \int_D \rho_{TF} = 1$$

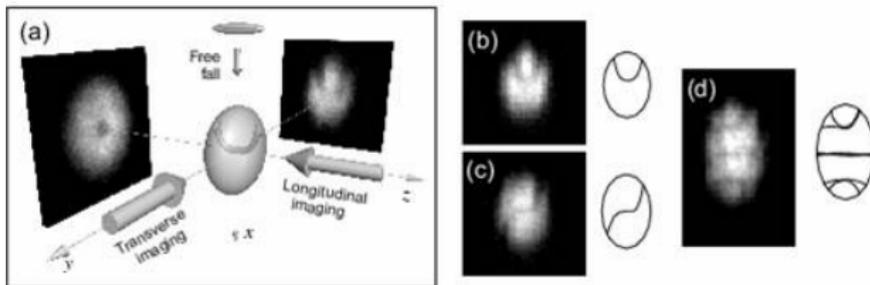
- résolution $\leq 240 \times 240 \times 240$



Condensat en rotation : résultats numériques

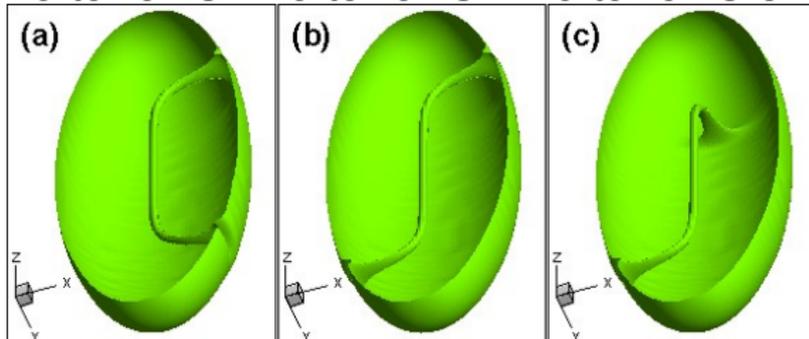
Potentiel harmonique : $V_{trap} = x^2 + \alpha^2 y^2 + \beta^2 z^2$

P. Rosenbusch, V. Bretin, J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. 2002



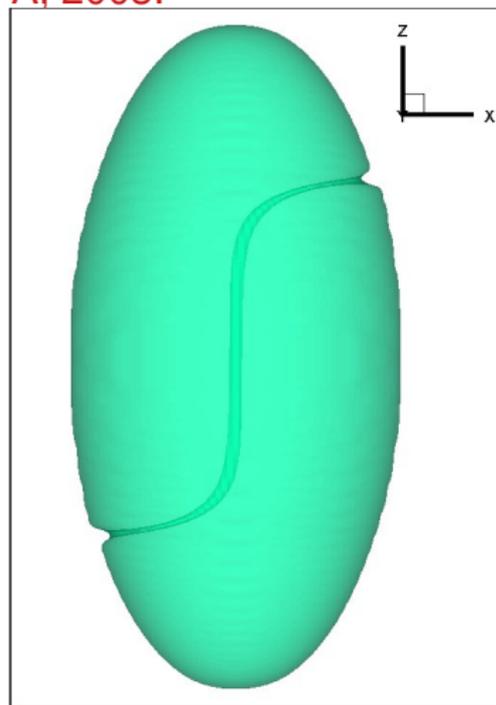
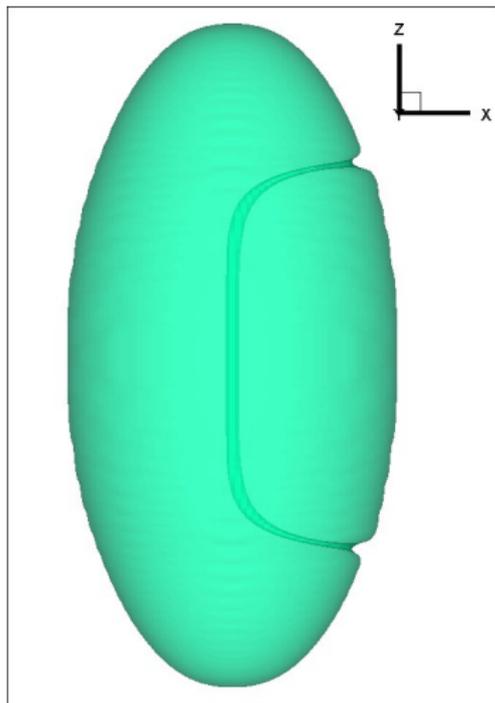
A. Aftalion, I. Danaila, Phys. Rev. A, 2003

vortex en U vortex en S vortex en U-3D



Vortex en U et en S

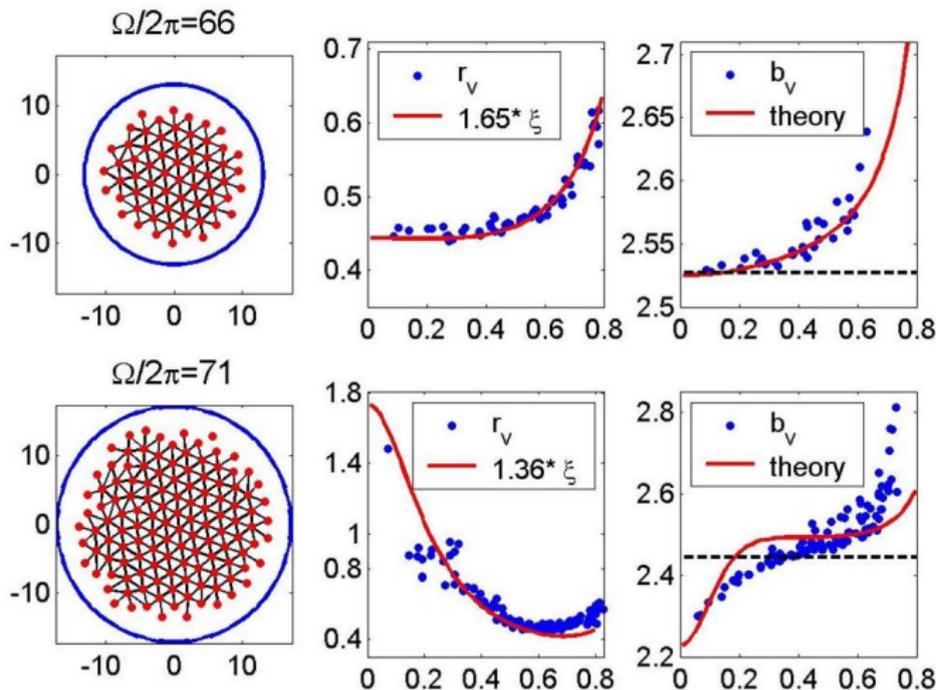
A. Aftalion, I. Danaila, Phys. Rev. A, 2003.



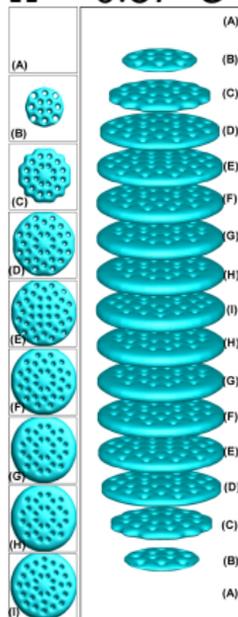
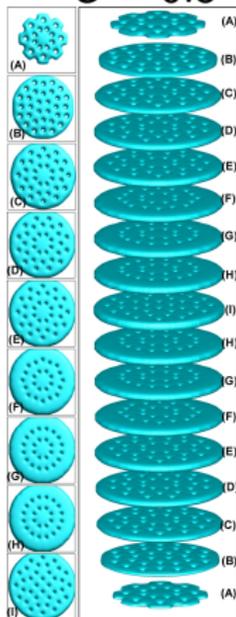
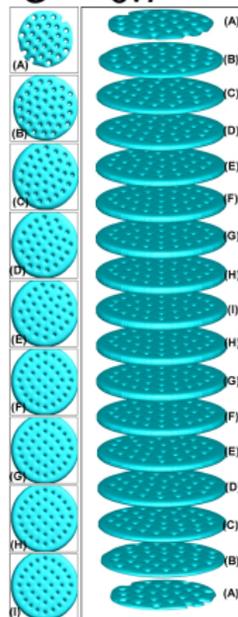
Comparaison avec la théorie

D. E. Sheehy and L. Radzihovsky, Phys. Rev. A, 2004.

I. Danaila, Phys. Rev. A, 2005 : param. réseau de vortex



Interférence de condensats en rotation

 $\Omega = 0.87 \quad U = 0.1$

 $U = 0.5$

 $U = 0.7$


Conclusion et perspectives

Conclusion

- codes de calcul 3D développés "in house" :: Navier-Stokes et Gross-Pitaevskii
- simulations 3D complexes, mais dans des configurations académiques
- **exploiter la physique reproduite par la simulation \implies comparaison avec l'expérience**

Perspectives

- puissance de calcul :: parallélisme
- schémas numériques :: interaction numérique \leftrightarrow modélisation physique (eg dissipation dans LES, ou NLS)