Spaţii Sobolev de aplicaţii între varietăţi

Petru Mironescu

Institutul Camille Jordan, Universitatea Lyon 1

Diaspora în cercetarea românească

17 septembrie 2008

Cadrul general

Cadrul geometric: varietatea de plecare, M

M este:

- fie o varietate compactă m-dimensională fără bord
- fie $(-1,1)^m$

Cadrul geometric: varietatea de sosire, N

N este o varietate compactă n-dimensională fără bord

Cadrul general

Cadrul geometric: varietatea de plecare, M

M este:

- fie o varietate compactă m-dimensională fără bord
- fie $(-1, 1)^m$

Cadrul geometric: varietatea de sosire, N

N este o varietate compactă n-dimensională fără bord

Cadrul funcţional: spaţiul $X_{s,p}$

$$X_{s,p} = W^{s,p}(M; N) := \{u : M \to N \,;\; u \in W^{s,p}\},$$

unde

- $0 < s < \infty$
- $1 \le p < \infty$

Pretext

În anumite cazuri particulare, problemele pe care le vom considera sunt motivate de studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale:

- problema densităţii şi problema urmei provin din studiul aplicaţiilor armonice între varietăţi
- studiul claselor de omotopie intervine în căutarea soluţiilor multiple pentru ecuaţii "geometrice" cu derivate parţiale (de exemplu, curbură medie prescrisă)
- problema ridicării intervine în studiul ecuaţiei Ginzburg-Landau

Pretext

În anumite cazuri particulare, problemele pe care le vom considera sunt motivate de studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale:

- problema densităţii şi problema urmei provin din studiul aplicaţiilor armonice între varietăţi
- studiul claselor de omotopie intervine în căutarea soluţiilor multiple pentru ecuaţii "geometrice" cu derivate parţiale (de exemplu, curbură medie prescrisă)
- problema ridicării intervine în studiul ecuaţiei Ginzburg-Landau

În forma generală tratată în cele ce urmează, problemele considerate depăşesc cadrul necesar studiului ecuaţiilor cu derivate parţiale

Plan

- Patru probleme: densitate, omotopie, urmă şi ridicare
- Conjecturi, rezultate şi perspective
- De ce cazul $N = \mathbb{S}^1$ este special

Densitate

Motivaţie

Densitate

Motivaţie

Observaţie (Schoen, Uhlenbeck '83)

În general, $C^\infty(\overline{M}; N)$ nu este dens în $X_{s,p} := W^{s,p}(M; N)$

Exemplu: $u(z) := z/|z|$

- aparţine spaţiului $W^{1,1}((-1,1)^2; \mathbb{S}^1)$
- dar nu există $(u_k) \subset C^\infty([-1,1]^2; \mathbb{S}^1)$ astfel încât $u_k \to u$ în $W^{1,1}$

Densitate

Motivaţie

Observaţie (Schoen, Uhlenbeck '83)

În general, $C^\infty(\overline{M}; N)$ nu este dens în $X_{s,p} := W^{s,p}(M; N)$
Exemplu: $u(z) := z/|z|$

- aparţine spaţiului $W^{1,1}((-1,1)^2; \mathbb{S}^1)$
- dar nu există $(u_k) \subset C^\infty([-1,1]^2; \mathbb{S}^1)$ astfel încât $u_k \to u$ în $W^{1,1}$

Demonstraţie

Prin reducere la absurd. Altfel, trecând la un subşir şi considerând un $r \in (0,1)$ convenabil, avem:
$u_k \to u \quad \text{în } W^{1,1}(C(0,r)) \Longrightarrow u_k \to u \quad \text{uniform pe } C(0,r) \Longrightarrow$
$\deg(u_k, C(0,r)) \to \deg(u, C(0,r))$, adică $0 \to 1$
Contradicţie $\square$

Densitate

Observaţii

- Când $sp > m =$dim M, avem $X_{s,p} \subset C^0$
  În acest caz, $C^\infty(\overline{M}; N)$ este dens în $X_{s,p}$
  (Demonstraţie: regularizăm $u \in X_{s,p}$, apoi proiectăm pe N)
- Acelaşi rezultat rămâne adevărat când $sp = m$
  (Urmând aceeaşi strategie ca în cazul precedent: Schoen, Uhlenbeck '83, Brezis, Nirenberg '95)
- Vom presupune deci $sp < m$

Problema densităţii

Să se găsească o clasă $\mathscr{R}$ de funcţii "atât de netede cât se poate" astfel încât $\mathscr{R}$ să fie densă în $X_{s,p}$

Problema densităţii: răspunsul probabil

Conjectură

Pentru orice N, s, p şi M (de dimensiune m), clasa

$$\mathscr{R} = \mathscr{R}_{s,p} := \{u \in C^\infty(\overline{M} \setminus \Sigma; N),\ \text{unde } \Sigma = \Sigma(u) \text{ este o varietate de dimensiune } m - [sp] - 1 \text{ şi } |D^j u(x)| \leq C \,\text{dist}\,(x, \Sigma)^{-j}, \forall\, j \in \mathbb{N}, \forall\, x \in M\}$$

este densă in $X_{s,p}$

Problema densităţii: răspunsul probabil

Observaţii

- Un exemplu tipic de funcţie din clasa $\mathscr{R}$:

$$u : (-1, 1)^2 \to \mathbb{S}^1, \qquad u(z) = z/|z|,$$

  este în $\mathscr{R}_{1,1}$

- Conjectura afirmă că "mărimea" (=dimensiunea) mulţimii singulare a funcţiilor din $\mathscr{R}$ depinde doar de M (=varietatea de plecare), de s şi de p, dar nu de N (=varietatea de sosire)

Problema densităţii: răspunsul probabil

Un răspuns alternativ

O conjectură mai modestă decât densitatea clasei $\mathscr{R}$ este densitatea clasei $\widetilde{\mathscr{R}}$, care este definită la fel ca $\mathscr{R}$, exceptând faptul că Σ este nu o varietate, ci o reuniune finită de varietăţi

Problema densităţii: rezultate

Teoremă (Bethuel '91)

Conjectura modestă (densitatea clasei $\widetilde{\mathscr{R}}$) este adevărată pentru spaţiul $W^{1,p}(M; N)$

Problema densităţii: rezultate

Teoremă (Bethuel '91)

Conjectura modestă (densitatea clasei $\widetilde{\mathscr{R}}$) este adevărată pentru spaţiul $W^{1,p}(M; N)$

Teoremă (Bousquet, Ponce, Van Schaftingen '08)

Conjectura modestă este adevărată pentru spaţiul $W^{s,p}(M; N)$, $s = 2, 3, \ldots$

Problema densităţii: răspunsuri

Teoremă (Brezis, M. '08)

Conjectura modestă este adevărată pentru spaţiul $W^{s,p}(M; N)$ când $0 < s < 1$

Problema densităţii: răspunsuri

Teoremă (Brezis, M. '08)

Conjectura modestă este adevărată pentru spaţiul $W^{s,p}(M;N)$ când $0 < s < 1$

Teoremă (Bethuel, Zheng '88, Rivière '00, Bourgain, Brezis, M. '04, Bousquet '07, Brezis, M. '08)

Conjectura este adevărată

- când $N = \mathbb{S}^1$
- când $N = \mathbb{S}^n$ şi $sp < n + 1$

Problema densităţii: o primă strategie

Metoda proiecţiei (Federer, Fleming)

Nu se poate aplica decât când $sp < n + 1$

Problema densităţii: o primă strategie

Metoda proiecţiei (Federer, Fleming)

Nu se poate aplica decât când $sp < n + 1$
Pentru a aproxima o aplicaţie $u : M \to \mathbb{S}^n$

- regularizăm u: obţinem $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon : M \to \mathbb{R}^{n+1}$
- proiectăm u_ε pe $\mathbb{S}^n$ utilizând un centru de proiecţie variabil: obţinem $u_{\varepsilon,a} = (u_\varepsilon - a)/|u_\varepsilon - a|$ ($a \in \mathbb{R}^{n+1}$)
- pentru un a "generic", mulţimea singulară a lui $u_{\varepsilon,a}$ este de dimensiune $m - n - 1$
- deci $u_{\varepsilon,a}$ este în clasa $\mathscr{R}$ când $sp < n + 1$
- considerând $\varepsilon \to 0$ şi $a = a(\varepsilon) \to 0$ convenabili, (sperăm să) obţinem un şir $(u_{\varepsilon_k,a_k}) \subset \mathscr{R}$ astfel încât $u_{\varepsilon_k,a_k} \to u$

Problema densităţii : o primă strategie

Metoda proiecţiei: observaţii

- Metoda funcţionează (sub ipoteza $sp < n + 1$)
- Când $sp \geq n + 1$, metoda este inutilă

Problema densităţii : o primă strategie

Metoda proiecţiei: observaţii

- Metoda funcţionează (sub ipoteza $sp < n + 1$)
- Când $sp \geq n + 1$, metoda este inutilă

Exemplu

- Când $n + 1 \leq sp < n + 2$, metoda proiecţiei construieşte funcţii cu o mulţime singulară de dimensiune $m - n - 1$
- În timp ce conjectura preconizează dimensiunea $m - n - 2$

Problema densităţii: o strategie alternativă

De la o funcţie oarecare la o funcţie simplă: un exemplu

Luăm $M = (-1,1)^3$. Tăiem M în cuburi mici C_j: obţinem un pavaj P

- Metoda $\#2$
  Considerăm restricţia u_2 a lui u pe 2-scheletul P_2 al lui P
  În fiecare cub C_j, extindem u_2 la C_j astfel încât extensia să fie constantă pe razele cubului C_j
- Metoda $\#1$
  Considerăm restricţia u_1 a lui u pe 1-scheletul P_1 al lui P
  Pe feţele cuburilor C_j, extindem u_1 la ∂C_j astfel încât extensia să fie constantă pe razele feţelor
  Obţinem o funcţie definită pe P_2
  Extindem această funcţie la M ca în construcţia $\#1$
- Metoda $\#0$
  Ca $\#1$, plecând de la restricţia pe P_0

Problema densităţii: o strategie alternativă

De la o funcţie oarecare la o funcţie simplă: observaţii

- Dacă restricţia lui u la P_j este continuă, atunci prin metoda $\#j$ obţinem o funcţie cu o mulţime singulară de dimensiune $m - j - 1$
- Or, restricţia lui u la P_j este continuă dacă P este un pavaj "generic", sp nu e întreg şi $j = [sp]$
- Deci când sp nu este întreg, prin metoda $\#[sp]$ putem obţine o funcţie stil $\widetilde{\mathscr{R}}$

Problema densităţii: o strategie alternativă

De la o funcţie oarecare la o funcţie simplă: rezultate

- Când $0 < s < 1$, alegând pavaje convenabile de mărime $\to 0$, metoda $\#[sp]$ (urmată de o regularizare) permite obţinerea unui şir din clasa $\widetilde{\mathscr{R}}$ convergând către u
- Metoda nu funcţionează **niciodată** când $s \geq 1$

Problema densităţii: perspective

Problema densităţii: ce mai rămâne de făcut

$\star\star\star$ Densitatea clasei $\mathscr{R}$ când $s = 1, 2, \ldots$, sau $0 < s < 1$

$\star\star\star$ Densitatea clasei $\widetilde{\mathscr{R}}$ când $1 < s < 1 + 1/p$

$\star\star\star$ Densitatea clasei $\widetilde{\mathscr{R}}$ în cazul general

Problema densităţii: o aplicaţie

Problema densităţii, o dată rezolvată, oferă o cale de a ataca problema următoare:
(P) Pentru ce M, N, s şi p, $C^\infty(\overline{M}; N)$ este dens în $X_{s,p}$?
Problemă rezolvată:

- Când $s = 1$ (Bethuel '91, Hang, Lin '03)
- Când $0 < s < 1$ (Brezis, M. '08)
- Când $N = \mathbb{S}^1$ (Brezis, M. '08)

Ideea comună : metodă de eliminare a singularităţilor (Bethuel '90)

Problema densităţii: o aplicaţie

Problema densităţii, o dată rezolvată, oferă o cale de a ataca problema următoare:
(P) Pentru ce M, N, s şi p, $C^\infty(\overline{M}; N)$ este dens în $X_{s,p}$?
Problemă rezolvată:

- Când $s = 1$ (Bethuel '91, Hang, Lin '03)
- Când $0 < s < 1$ (Brezis, M. '08)
- Când $N = \mathbb{S}^1$ (Brezis, M. '08)

Ideea comună : metodă de eliminare a singularităţilor (Bethuel '90)

Ce mai rămâne de făcut

$\star \star \star$ Densitatea clasei $\widetilde{\mathscr{R}}$ dă răspunsul la problema (P)

Omotopie

Problemă

Să se descrie componentele conexe ale lui $X_{s,p} = W^{s,p}(M; N)$
Problemă anexă: componentele conexe sunt conexe prin arce?

Omotopie

Problemă

Să se descrie componentele conexe ale lui $X_{s,p} = W^{s,p}(M; N)$
Problemă anexă: componentele conexe sunt conexe prin arce?

Observaţie

În general, $X_{s,p}$ nu este conex prin arce
Motiv: există invarianţi omotopici

Problema omotopiei: un exemplu

Exemplu: enunţ

Aplicaţiile $u : \mathbb{S}^1 \times (0,1)^2 \to \mathbb{S}^1$, $u \in H^1 = W^{1,2}$, admit un invariant omotopic

Chiar dacă, în dimensiune trei, H^1 este "departe" de a fi inclus în C^0

Problema omotopiei: un exemplu

Exemplu: ideea demonstraţiei

Pentru un $\lambda \in (0,1)^2$ "generic",

$$u(\cdot,\lambda) \in H^1(\mathbb{S}^1;\mathbb{S}^1) \subset C^0(\mathbb{S}^1;\mathbb{S}^1)$$

Deci deg $u(\cdot,\lambda)$ este definit a. p. t.
Se poate arăta că acest grad nu depinde de λ şi este continuu pentru convergenţa H^1
(Argumentul care intervine este o reducere de dimensiune: se începe cu $\mathbb{S}^1 \times (0,1)$, apoi se trece la $\mathbb{S}^1 \times (0,1)^2$) $\square$

Invariant omotopic: cazul general

Notaţii

M_j est un schelet "generic" j-dimensional al lui M

$$< a >= \begin{cases} [a], & \text{dacă } a \text{ nu este întreg} \\ a - 1, & \text{dacă } a \text{ este întreg} \end{cases}$$

Invariant omotopic: cazul general

Notaţii

M_j est un schelet "generic" j-dimensional al lui M

$$< a >= \begin{cases} [a], & \text{dacă } a \text{ nu este întreg} \\ a-1, & \text{dacă } a \text{ este întreg} \end{cases}$$

Teoremă (White '86, '88, Bousquet '07)

Dacă $sp \geq 2$, atunci restricţia lui $u \in W^{s,p}(M;N)$ la $M_{<sp>}$ este un invariant omotopic $[u]$ independent de alegerea lui $M_{<sp>}$

Problema omotopiei: răspunsul probabil

Conjectură

Invarianţii lui White sunt singurii invarianţi:
Dacă $u, v \in W^{s,p}(M; N)$ şi $[u] = [v]$, atunci u şi v sunt omotope

Problema omotopiei: rezultate

Teoremă (Brezis, Li ’00)

Dacă $p < 2$ (=nu există invarianţi), atunci $W^{1,p}(M; N)$ este conex prin arce

Problema omotopiei: rezultate

Teoremă (Brezis, Li '00)

Dacă $p < 2$ (=nu există invarianţi), atunci $W^{1,p}(M; N)$ este conex prin arce

Teoremă (Brezis, M. '01)

Când $N = \mathbb{S}^1$, conjectura este adevărată pentru orice s şi p

Problema omotopiei: rezultate

Teoremă (Hang, Lin ’03)

Conjectura este adevărată în $W^{1,p}(M; N)$ pentru orice p

Problema omotopiei: rezultate

Teoremă (Hang, Lin '03)

Conjectura este adevărată în $W^{1,p}(M;N)$ pentru orice p

Teoremă (Bousquet '07)

Conjectura este adevărată în $W^{s,p}(M;N)$ când $s < 1 + 1/p$

Problema omotopiei: perspective

Ce mai rămâne de făcut

$\star\star\star$ Cazul $s \geq 1 + 1/p$ (chiar şi pentru sfere)

Urmă

Cadru

În această parte, s şi p sunt astfel încât tr $W^{s,p} = W^{s-1/p,p}$
Adică:

- fie $p = 2$ şi $s > 1/2$
- fie $p \neq 2$, $s > 1/p$ şi $s - 1/p$ nu este întreg

Pentru simplitate, $M = (-1, 1)^m$
Identificăm M cu $M \times \{0\}$
N este oarecare

Urmă

Cadru

În această parte, s şi p sunt astfel încât $\mathrm{tr}\, W^{s,p} = W^{s-1/p,p}$
Adică:

- fie $p = 2$ şi $s > 1/2$
- fie $p \neq 2$, $s > 1/p$ şi $s - 1/p$ nu este întreg

Pentru simplitate, $M = (-1, 1)^m$
Identificăm M cu $M \times \{0\}$
N este oarecare

Problema urmei

Să se descrie

$$\mathrm{tr}\, W^{s,p}(M \times (0,1); N) := \{\mathrm{tr}_{|M}\, u\ ;\ u \in W^{s,p}(M \times (0,1); N)\}$$

Problema urmei: un exemplu

Observaţie

Răspunsul **nu** este $W^{s-1/p,p}(M; N)$

Problema urmei: un exemplu

Observaţie

Răspunsul **nu** este $W^{s-1/p,p}(M;N)$

Exemplu

- Aplicaţia $z \mapsto v(z) := z/|z|$ este în $H^{1/2}((-1,1)^2;\mathbb{S}^1)$...
- ...dar nu este urma unei aplicaţii $u \in H^1((-1,1)^2 \times (0,1);\mathbb{S}^1)$

Problema urmei: un exemplu

Observaţie

Răspunsul **nu** este $W^{s-1/p,p}(M;N)$

Exemplu

- Aplicaţia $z \mapsto v(z) := z/|z|$ este în $H^{1/2}((-1,1)^2;\mathbb{S}^1)$...
- ...dar nu este urma unei aplicaţii $u \in H^1((-1,1)^2 \times (0,1);\mathbb{S}^1)$

Ideea demonstraţiei

- Prin reducere la absurd
- Pentru un şir $\varepsilon_k \to 0$ convenabil, $u(\cdot,\varepsilon_k) \in H^1((-1,1)^2;\mathbb{S}^1)$ şi $u(\cdot,\varepsilon_k) \to v$ în $H^{1/2}$
- Or, $C^\infty([-1,1]^2;\mathbb{S}^1)$ este dens în $H^1((-1,1)^2;\mathbb{S}^1)$, dar nu şi în $H^{1/2}((-1,1)^2;\mathbb{S}^1)$
- Contradicţie $\square$

Problema urmei

Observaţii

- Nici o conjectură nu acoperă cazul general
- Nici problema mai modestă : pentru ce s, p, M şi N avem

$$\operatorname{tr} W^{s,p}(M; N) = W^{s-1/p,p}(M; N)?$$

  nu este înţeleasă

Problema urmei: rezultate

Teoremă (Hardt, Lin '87)

Dacă $\pi_j(N) = 0$, $j = 0, \ldots, [p] - 1$, atunci

$$\operatorname{tr} W^{1,p}(M;N) = W^{1-1/p,p}(M;N)$$

Problema urmei: rezultate

Teoremă (Hardt, Lin '87)

Dacă $\pi_j(N) = 0$, $j = 0, \ldots, [p] - 1$, atunci

$$\operatorname{tr} W^{1,p}(M; N) = W^{1-1/p,p}(M; N)$$

Ideea demonstrației

Condițiile topologice asupra lui N permit mimarea metodei proiecției $\square$

Problema urmei: rezultate

Exemple (Bethuel, Demengel '94)

Exemple de cazuri în care tr $W^{s,p}(M;N) \neq W^{s-1/p,p}(M;N)$

Problema urmei: rezultate

Exemple (Bethuel, Demengel '94)

Exemple de cazuri în care tr $W^{s,p}(M;N) \neq W^{s-1/p,p}(M;N)$

Ideea demonstraţiei

Sunt cazuri în care

- $C^\infty([-1,1]^m;N)$ nu este dens în $W^{s-1/p,p}(M;N)$
  dar
- $C^\infty([-1,1]^m \times [0,1];N)$ este dens în $W^{s,p}(M;N)$ $\square$

Problema urmei: rezultate

"Teoremă" (Brezis, M., Nguyen '08)

Problema urmei est rezolvată când $N = \mathbb{S}^1$

Problema urmei: perspective

Ce mai rămâne de făcut

$\star\star\star$ Teorema Hardt, Lin ar trebui să se extindă la cazul $\pi_j(N) = 0$, $j = 0, \ldots, [sp] - 1$

$\star\star\star$ Cazul $N =$sferă

$\star\star\star$ Cazul general (pare foarte departe)

Ridicare

Notaţii

- Z este acoperirea universală a lui N
- $\pi : Z \rightarrow N$ este proiecţia canonică

Cadru

- s, p sunt fixaţi
- Pentru simplitate, $M = (-1, 1)^m$

Problema ridicării

Problema ridicării

Este adevărat că **orice** aplicaţie $u \in W^{s,p}(M;N)$ se scrie $u = \pi \circ v$ cu $v \in W^{s,p}(Z;N)$?
Problemă anexă: în caz contrar, cu cine trebuie înlocuit $W^{s,p}(Z;N)$?

Caz particular

Vrem să scriem o aplicaţie $u \in W^{s,p}((-1,1)^m;\mathbb{S}^1)$ sub forma $u = e^{\imath\varphi}$, cu $\varphi \in W^{s,p}((-1,1)^m;\mathbb{R})$

Problema ridicării: un exemplu

Exemplu

În general, răspunsul este **nu**
Exemplu: $u : (-1,1)^2 \to \mathbb{S}^1$, $u(z) = z/|z|$

- Este în $W^{1,1}$
- Dar nu se poate scrie sub forma $u = e^{\imath\varphi}$ cu $\varphi \in W^{1,1}$

Problema ridicării: un exemplu

Exemplu

În general, răspunsul este **nu**
Exemplu: $u : (-1,1)^2 \to \mathbb{S}^1$, $u(z) = z/|z|$

- Este în $W^{1,1}$
- Dar nu se poate scrie sub forma $u = e^{\imath\varphi}$ cu $\varphi \in W^{1,1}$

Ideea demonstraţiei

- Prin reducere la absurd
- În caz contrar, pe un cerc generic $C(0,r)$, $e^{\imath\theta} = e^{\imath\varphi}$, cu $\varphi \in W^{1,1} \subset C^0$
- Deci $e^{\imath\theta}$ are o fază continuă. Contradicţie $\square$

Problema ridicării: rezultate

"Teoremă" (Bourgain, Brezis, M. '00)

Problema ridicării este complet rezolvată când $N = \mathbb{S}^1$

Problema ridicării: rezultate

"Teoremă" (Bourgain, Brezis, M. '00)

Problema ridicării este complet rezolvată când $N = \mathbb{S}^1$

"Teoremă" (Bethuel, Chiron '07)

"Teorema" precedentă rămâne adevărată când Z nu este compactă

Problema ridicării: perspective

Cazul când Z este compactă

Bethuel, Chiron au elucidat acest caz pentru unele valori particulare ale lui s şi p

$\star \star \star$ Cazul general?

Cazul $N = \mathbb{S}^1$

Cadru

Pentru simplitate, luăm $M = (-1,1)^m$

De ce cazul $N = \mathbb{S}^1$ e special

- Când $N = \mathbb{S}^1$, toate problemele (densitate, urmă, *et cætera*) sunt complet rezolvate
- Chiar dacă aceste probleme sunt **nelineare**, în cazul $N = \mathbb{S}^1$ putem să le transformăm în probleme **lineare**
- Ideea naivă: scriem fiecare $u \in W^{s,p}((-1,1)^m; \mathbb{S}^1)$ sub forma $u = e^{\imath\varphi}$, cu $\varphi \in W^{s,p}((-1,1)^m; \mathbb{R})$...
- ...ar permite înlocuirea spaţiului nelinear $W^{s,p}((-1,1)^m; \mathbb{S}^1)$ cu spaţiul **linear** $W^{s,p}((-1,1)^m; \mathbb{R})$...
- ... dar din păcate nu funcţionează

Cazul $N = \mathbb{S}^1$

Introducere la ce va urma

Putem să asociem spaţiului $W^{s,p}((-1,1)^m;\mathbb{S}^1)$ un "obiect linear", mai complicat decât $W^{s,p}((-1,1)^m;\mathbb{R})$

Cazul $N = \mathbb{S}^1$

Notaţie

Considerăm $a, b \in \overline{\mathbb{D}}$

Vom nota "$\left(\frac{z-a}{|z-a|}\right)\left(\frac{|z-b|}{z-b}\right)$" o funcţie u cu valori în $\mathbb{S}^1$ astfel încât:

- u este C^∞ în $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{a, b\}$
- $u(z) = \left(\frac{z-a}{|z-a|}\right)\left(\frac{|z-b|}{z-b}\right)$ în vecinătatea lui a şi b
- $\|\nabla u\|_{L^1} \sim |a-b|$

Cazul $N = \mathbb{S}^1$

Descriptio $W^{s,p}((-1,1)^m;\mathbb{S}^1)$: un exemplu (folclor, *cca* '00)

Avem

$$W^{1,1}((-1,1)^2;\mathbb{S}^1) = \Bigg\{ \text{"}\prod_{j=1}^{\infty}\text{"} \left(\frac{z-a_j}{|z-a_j|}\right)\left(\frac{|z-b_j|}{z-b_j}\right)\text{"}\, e^{\imath\varphi} \; ; \; (a_j),(b_j)\subset[-1,1]^2, \sum_{j=1}^{\infty}|a_j-b_j|<\infty, \; \varphi\in W^{1,1}((-1,1)^2;\mathbb{R}) \Bigg\}$$

Cazul $N = \mathbb{S}^1$: spaţiu de moduli

"Teoremă" (Bourgain, Brezis ’03, Bourgain, Brezis, M. ’04, Nguyen ’08, M. ’08)

În funcţie de valorile lui s şi p, putem descrie $W^{s,p}((-1,1)^m;\mathbb{S}^1)$:

- Fie *via* o fază φ aparţinând unui spaţiu convenabil (nu neapărat $W^{s,p}$)
- Fie *via* un cuplu (T,φ), unde φ este o fază şi T este un 2-curent de multiplicitate întreagă
  (Intuitiv, T este : un şir de puncte în dimensiune 2, un şir de curbe în dimensiune 3, *et cætera*)

Cazul $N = \mathbb{S}^1$: exemple de spaţii de moduli

Exemplul #1: spaţiul de faze este o sumă

$$W^{1/2,6}((-1,1)^4;\mathbb{S}^1) = \{e^{\imath\varphi}\ ;\ \varphi \in W^{1/2,6} + W^{1,3}\}$$

Cazul $N = \mathbb{S}^1$: exemple de spaţii de moduli

Exemplul $\#2$: spaţiul de faze este o intersecţie

$$W^{3,1}((-1,1)^4;\mathbb{S}^1) = \{e^{\imath\varphi}\ ;\ \varphi \in W^{3,1} \cap W^{1,3}\}$$

Cazul $N = \mathbb{S}^1$: exemple de spaţii de moduli

Exemplul $\#3$: un caz când este nevoie de T

$$W^{1/2,3}((-1,1)^4;\mathbb{S}^1) \sim \{(T,\varphi)\ ;\ T \in D,\ \varphi \in W^{1/2,3} + W^{1,3/2}\},$$

unde

$$D = \{T\ ;\ T \text{ 2-curent întreg}, T \in (W^{1,3})^*\}$$

Cazul $N = \mathbb{S}^1$: spaţiu de moduli

Ideea demonstraţiei

Utilizarea informaţiilor geometrice în formule analitice $\square$

Exemplu de "informaţie geometrică$\to$ formulă"

Exemplu

Dacă

- $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ este netedă
- $v : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}^2$ este o extensie rezonabilă a lui f,

atunci

$$\deg f = \fint_{\mathbb{D}} \operatorname{Jac} v$$

Exemplu de "informaţie geometrică$\rightarrow$ formulă"

Exemplu

Dacă

- $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ este netedă
- $v : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ este o extensie rezonabilă a lui f,

atunci

$$\deg f = \fint_{\mathbb{D}} \operatorname{Jac} v$$

Or

- deg există când f este doar continuă (sau chiar mai puţin)
- în timp ce $\fint_{\mathbb{D}} \operatorname{Jac} v$ există sub ipoteza $v \in H^1$...
- ...adică $f \in H^{1/2}$

Exemplu de "informaţie geometrică$\longrightarrow$ formulă"

Alegând un v convenabil (alegerea ţine cont de informaţia geometrică $|f| = 1$), putem da un sens integralei $\displaystyle ⨍_{\mathbb{D}}$ Jac v

Articole de sinteză

Hang, Lin, *Topology of Sobolev mappings*, Mathematical Research Letters **8** (2001), 321–330

Articole de sinteză

Hang, Lin, *Topology of Sobolev mappings*, Mathematical Research Letters **8** (2001), 321–330

Bethuel, Chiron, *Some questions related to the lifting problem in Sobolev spaces*, în Perspectives in Nonlinear Partial Differential Equations, (H. Berestycki, M. Bertsch, F. Browder, L. Nirenberg, editori), Contemporary Mathematics, volumul 446 (2007), 125–152

Articole de sinteză

Hang, Lin, *Topology of Sobolev mappings*, Mathematical Research Letters **8** (2001), 321–330

Bethuel, Chiron, *Some questions related to the lifting problem in Sobolev spaces*, în Perspectives in Nonlinear Partial Differential Equations, (H. Berestycki, M. Bertsch, F. Browder, L. Nirenberg, editori), Contemporary Mathematics, volumul 446 (2007), 125–152

...şi, cu voia dumneavoastră, ultimul de pe listă...

Articole de sinteză

Hang, Lin, *Topology of Sobolev mappings*, Mathematical Research Letters **8** (2001), 321–330

Bethuel, Chiron, *Some questions related to the lifting problem in Sobolev spaces*, în Perspectives in Nonlinear Partial Differential Equations, (H. Berestycki, M. Bertsch, F. Browder, L. Nirenberg, editori), Contemporary Mathematics, volumul 446 (2007), 125–152

...şi, cu voia dumneavoastră, ultimul de pe listă...

M., *Sobolev maps on manifolds: degree, approximation, lifting*, în Perspectives in Nonlinear Partial Differential Equations, (H. Berestycki, M. Bertsch, F. Browder, L. Nirenberg, L. A. Peletier, L. Véron editori), Contemporary Mathematics, volumul 446 (2007), 413–436

Vă mulţumesc pentru atenţie